

ネーター保存量としての熱力学エントロピー

理化学研究所 数理創造プログラム (iTHEMS)

横倉祐貴 *

概要

エントロピーは物理学においてマクロとミクロの物理をつなぐ特別な役割を担っている。しかしその理解は平衡状態に限られており、系が時間発展する場合に対しては未だに明らかではない。だが、「断熱準静的操作の下でエントロピーは保存する」という過程は、断熱定理によってミクロな力学から理解されている。保存則と来たら、ネーターの定理により、対称性を考えたい。興味深いことに、ブラックホールのエントロピーはホライズン上の時間の対称性に対するネーターチャージとして定式化することができる。となると、エントロピーの断熱不変性に対応する対称性は一体何だろうか？本講義では、学部で学ぶ解析力学と古典統計力学の知識を使って、この問いに答える。そして、そこから導かれる新しい方向性を議論する。本講義はあまり多くの新しい内容を含まないが、その代わり、基礎的な内容をきちんと説明する。それらの組み合わせで、新しい基礎概念がどのように現れてくるのかを楽しんでもらいたい。講義は板書形式で行う。

1 はじめに：エントロピー保存則と対称性

断熱壁に囲まれたピストンの中に N 個の粒子が閉じ込められているとしよう（図1の左下）。熱力学では、マクロな量である、エネルギー E と体積 V を定めれば、この系の平衡状態は完全に指定できる。実際、熱力学関数としてのエントロピー $S(E, V)$ が温度などの熱力学量を決定する。この意味で、対 (E, V) が熱力学的状态空間を構成する（図1の左上）。

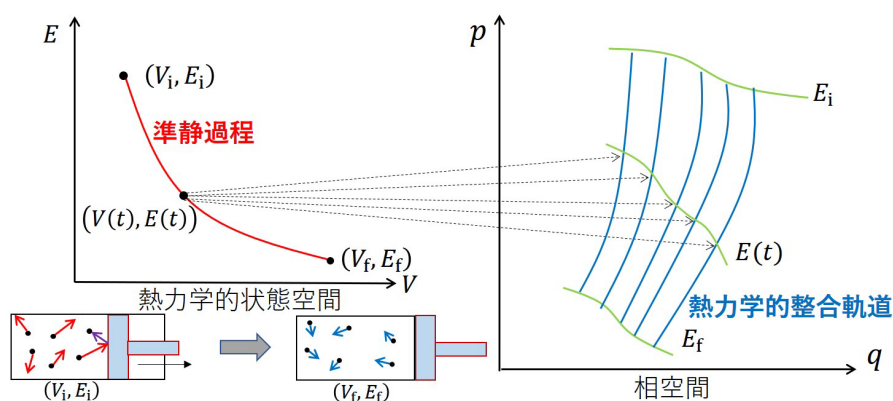


図 1: 左下：断熱ピストン。左上：熱力学的状态空間の準静過程。右：相空間上の熱力学の整合軌道。

*yuki.yokokura@riken.jp

このピストンを引っ張ってみよう。すると、体積が時間と共に大きくなり、系は外部に正の仕事をし、エネルギーは減少する。では、特別な場合として、時々刻々と変化する体積に対し、常にそのときの平衡状態になるほどにゆっくりとピストンを動かすとしよう（準静的操作）。この過程は熱力学的状態空間の曲線 $(V(t), E(t))$ として表される（図1の左）。このとき、時間の関数としてのエントロピー $S(t) = S(E(t), V(t))$ は一定になる。これが熱力学におけるエントロピーの断熱不変性である。

ところで、ネーターの定理は系の連続的な対称性と保存則を結びつける。ここで、対称性は運動方程式の性質ではなく、系を特徴づける作用の性質であることに注意する。よって、対称性を調べるためには、運動方程式を使わずに、軌道の汎関数である作用の変分を計算しなければならない。

本講義では、論文 [1] に沿って、このエントロピー保存則に対応する対称性を探し出す。重要な点は、上で見たように、準静断熱過程でのみエントロピーは保存するため、一般的な軌道に対しては、作用はそのような対称性を持たないことである。そこで、熱力学準静過程と整合的な相空間の軌道「熱力学的整合軌道」を導入する（図1の右）。作用の定義域をそのクラスに限定すると、その対称性が出現する。本講義は、断熱定理、ネーターの定理、そして、対称性の導出という流れで行う¹。

2 Boltzmann エントロピー

2.1 系の設定

N 個の粒子が体積 $V(t)$ の断熱ピストン内に閉じ込められている。それらは短距離相互作用をし、マクロに見れば熱力学的な振る舞いをする。その作用は

$$I[\hat{q}; \hat{V}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t); V(t)) \quad (1)$$

と表せる。ここで、 $q(t)$ と $\dot{q}(t)$ は時刻 t における N 個の粒子の位置と速度をまとめて表し、軌道 $\hat{q}$ は (q, t) 空間上のグラフである。 $V(t)$ は指定されたピストンの動かし方に対応した時間の与えられた関数である。つまり、 $V(t)$ は力学変数ではなく、粒子の存在できる空間領域を指定する背景場である。

実際の運動は、運動方程式の解軌道 $\hat{q}_*$ で与えられ、それは作用 I の極値をとる： $\delta I_* = 0$ 。ここで、添え字 $*$ は解軌道 $\hat{q}_*$ で評価されていることを表す。

エネルギーは

$$E(q, \dot{q}, V) \equiv \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad (2)$$

と定義する。系が時々刻々変化しているので、エネルギーは保存しない： $\frac{dE}{dt}|_* = -\frac{\partial L}{\partial V} \dot{V}$ 。もし $\dot{V} = 0$ の場合には、エネルギー E 以外の保存量は存在しないとする。

2.2 エントロピーの定義と基本恒等式

正準形式に移行しよう。運動量 $p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を定義すると、系のミクロな状態は相空間の点 $\Gamma = (q, p)$ で表される。ダイナミクスはハミルトニアン $H(\Gamma; V) \equiv E(q, \dot{q}(q, p, V), V)$ が決める。このとき、エントロピーを次で定義する：

$$S(E, V) \equiv \log \frac{\Omega(E, V)}{N!}. \quad (3)$$

¹いくつかの簡単な導出・式変形を“宿題”として、脚注に書いておきました。ぜひチャレンジしてみてください！

ここで、 $\Omega(E, V) \equiv \int d\Gamma \theta(E - H(\Gamma, V))$ (ステップ関数 $\theta(x) = 1$ for $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ for $x < 0$) は、与えられた V の下での、エネルギー E で囲まれる相空間領域の体積である²。つまり、エントロピーは熱力学量 (E, V) を実現しうるミクロな力学的状態の総数である。

これは次の恒等関係式を満たす³：

$$dS = \beta dE - \beta \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E,V}^{\text{mc}} dV. \quad (4)$$

ここで、逆温度 $\beta \equiv \frac{\Sigma(E, V)}{\Omega(E, V)}$ 、規格化因子 $\Sigma(E, V) \equiv \int d\Gamma \delta(E - H(\Gamma, V))$ であり、物理量 $A(\Gamma, V)$ のミクロカノニカル平均 $\langle A \rangle_{E,V}^{\text{mc}} \equiv \frac{1}{\Sigma(E, V)} \int d\Gamma \delta(E - H(\Gamma, V)) A(\Gamma, V)$ である。ところで、 $-\frac{\partial H}{\partial V}$ は力学的圧力であるので、そのミクロカノニカル平均は熱力学的圧力 p である。従って、(4) は熱力学関数としてのエントロピーの関係式 $dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV$ であり、定義 (3) は平衡熱力学と整合的である。

3 断熱定理

先ほどのエントロピーの断熱不変性を (3) のミクロな視点からもう一度見てみよう。ピストンを引っ張ると、粒子が壁に衝突し外部に正の仕事を行うため、粒子の運動エネルギーが減り、運動量空間体積は小さくなる (図1左下の各粒子の矢印は短くなる)。同時に、体積が大きくなり、粒子が存在できる空間領域が大きくなり、そして実空間体積は増大する。もし準静的にピストンを動かすと、これら2つの効果がちょうど打ち消し合い、エントロピーは一定に保たれる。これを数学的に示しているのが断熱定理である。それは、Liouville の定理に準静的条件を加えたものである。

3.1 Liouville の定理

正準変数 $\Gamma = (q, p)$ についての運動方程式を導く正準形式の作用 $I^{(\text{can})}[\hat{\Gamma}]$ は、(1) と (2) より、

$$I^{(\text{can})}[\hat{\Gamma}] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\Theta_\mu(\Gamma) \dot{\Gamma}^\mu - H(\Gamma) \right) \quad (5)$$

である⁴。ここで、 $H(\Gamma)$ はハミルトニアン、 $\Gamma^\mu = (q^1, q^2, \dots; p_1, p_2, \dots)$ 、 $\Theta_\mu = (p_1, p_2, \dots; 0, 0, \dots)$ であり、また「添え字 μ が二回現れたら和を取る」としている⁵。 Γ^μ について変分をとると、

$$\delta I^{(\text{can})} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{d}{dt} (\Theta_\mu \delta \Gamma^\mu) + (\Omega_{\mu\nu} \dot{\Gamma}^\nu - \partial_\mu H) \delta \Gamma^\mu \right) \quad (6)$$

となる⁶。ここで $\Omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Theta_\nu - \partial_\nu \Theta_\mu$ はシンプレクティック形式である⁷。よって、最小作用の原理 ($\delta q|_{t_i, t_f} = 0$ と $\delta I^{(\text{can})} = 0$) から、正準方程式を得る⁸：

$$\dot{\Gamma}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \partial_\nu H \quad \text{with} \quad \Omega^{\mu\nu} \equiv (\Omega^{-1})_{\mu\nu}. \quad (7)$$

² $k_B = 1$ に取っている。また、量子論からの極限では、 $\frac{\Omega(E, V)}{N!}$ を $(2\pi\hbar)^{3N}$ で割った表式が導かれる [2] が、以下の議論では効かないので、書かないことにする。

³ 宿題1：定義 (3) から E と V について変分して (4) を求めよ。

⁴ この小節の参考書は、例えば、[3] を見よ。

⁵ 実には、 Γ^μ を相空間の一般座標 (任意の正準変数) として、時間座標 t を進める母関数をハミルトニアン $H(\Gamma)$ 、作用 (1) から運動方程式を導くときに現れる境界項を $\Theta_\mu(\Gamma) \delta \Gamma^\mu$ と定義すれば、(5) が一般に得られる。

⁶ 宿題2：(6) を導け。

⁷ 宿題3：座標系 $\Gamma^\mu = (q^1, q^2, \dots; p_1, p_2, \dots)$ において $\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となることを確認せよ。

⁸ 宿題4：座標系 $\Gamma^\mu = (q^1, q^2, \dots; p_1, p_2, \dots)$ では、(7) が $\dot{q} = \partial_p H$, $\dot{p} = -\partial_q H$ になることを確認せよ。

さて、相空間の有限領域 D_t を考える。その中の各点 Γ^μ から出発し、正準方程式 (7) に従って微小時間 Δt だけ“流れた”点 $\Gamma'^\mu = \Gamma^\mu + v^\mu \Delta t$ は新しい有限領域 $D_{t+\Delta t}$ を成す。ここで、 $v^\mu = \dot{\Gamma}^\mu|_*$ は出発点での“初速度”である。このとき、相空間体積 $V[D_t] = \int_{D_t} d\Gamma$ の時間変化率は

$$\frac{d}{dt}V[D_t] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V[D_{t+\Delta t}] - V[D_t]}{\Delta t} = \int_{D_t} d\Gamma \partial_\mu v^\mu \quad (8)$$

で与えられる⁹。いま、解軌道に沿った変化なので、 $\partial_\mu v^\mu$ に正準方程式 (7) を適用すると、

$$\partial_\mu v^\mu = \partial_\mu \dot{\Gamma}^\mu = \partial_\mu (\Omega^{\mu\nu} \partial_\nu H) = (\partial_\mu \Omega^{\mu\nu}) \partial_\nu H + \Omega^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu H) = 0 \quad (9)$$

を得る。ここで、 $\Omega^{\mu\nu}$ が定数行列であることと¹⁰、反対称性 $\Omega^{\mu\nu} = -\Omega^{\nu\mu}$ を利用している。

これが Liouville の定理「正準方程式に従う限り、任意の相空間体積は保存する」である¹¹。これは状態数が保存することを意味しており、それは量子論のユニタリティに対応する。注目すべきは、(9) は $\Omega^{\mu\nu}$ の性質によって保証されており、ハミルトニアン¹²の構造に全く依存しない点である。よって、時間に依存するハミルトニアンであっても常に成立する。

3.2 準静的条件

「ピストンをゆっくり動かす」という準静的操作を数学的に定式化しよう。いま、ピストンの操作に対応する時間の関数 $V(t)$ を $V(t) = \bar{V}(\epsilon t)$ with $\frac{d}{d\tau} \bar{V}(\tau) = O(1)$ という、 ϵ に依らない関数形のものに取ろう。ここで、 $\epsilon \ll 1$ は“ゆっくりさ”を表すパラメータであり、 $\tau \equiv \epsilon t$ は体積の有意な変化を表す“実質的な時間”である。実際に、 t の微分は $\dot{V} = \epsilon O(1) \ll 1$ となる。このとき、準静的極限を

$$\text{このような } V(t) \text{ に対し、} \tau_i = \epsilon t_i \text{ と } \tau_f = \epsilon t_f \text{ を固定させながら、} \epsilon \rightarrow 0 \text{ をとる} \quad (10)$$

と定義する¹²。これは「非常に長い実時間 t に渡ってゆっくりとピストンを動かしながら、その変化は有意にマクロなものになっている」を意味している。

準静的極限 (10) の下で、物理的な解軌道 $\hat{\Gamma}_*$ が満たすべき条件は次である：

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dV}{dt} \frac{\partial H}{\partial V} \Big|_* = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dV}{dt} \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E_*(t), V(t)}^{\text{mc}}, \quad (11)$$

$$E_*(t) = \bar{E}(\epsilon t) \text{ with } \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} = O(1) \quad (12)$$

ここで、 $E(t)$ は与えられた軌道 $\hat{\Gamma}$ をハミルトニアンに代入して得られる時間の関数 $E(t) \equiv H(\Gamma(t), V(t))$ であり、 $\bar{E}(\epsilon t)$ は ϵ に依らない関数形である。

これらの物理的意味はとてもシンプルである。まず、(4) の下の議論を思い出すと、(11) は「(力学的仕事) = (熱力学的仕事)」を意味している。つまり、一つの解軌道 $\hat{\Gamma}_*$ に沿った時間発展でなされる一回の仕事が統計平均を取ったものに一致する。その結果、エネルギー保存則から、(12) は「エネルギーは体積の変化と同じくらいゆっくりと変化する」を意味している。従って、これらを満たす解

⁹宿題5 : $V[D_{t+\Delta t}] = \int_{D_{t+\Delta t}} d\Gamma' = \int_{D_t} \left| \frac{\partial \Gamma'^\mu}{\partial \Gamma^\mu} \right| d\Gamma$ に注目して、(8) を示せ。

¹⁰Darboux の定理「局所的に $\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる座標が選べる」により、常にこれは可能である [3]。

¹¹別の等価な表現としては「相空間の分布関数 $\rho(\Gamma, V)$ が運動方程式の下で、 $\frac{d\rho}{dt}|_* = 0$ 」がある [2]。

¹²このとき、どれ位 ϵ を小さくするかは系の緩和時間に依存する。以下を見よ。

軌道 $\hat{\Gamma}_*$ は、図 1 の熱力学的状態空間の断熱準静過程の曲線を実現する、一つのミクロな力学系の時間発展を表していると言える。次に、これらがどのように成立するのを見てみよう。

・条件 (11) の成立について まず、一般の軌道 $\hat{\Gamma}$ に沿ったエネルギーの時間変化は

$$\frac{dE(t)}{dt} = \partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu + \frac{\partial H}{\partial V} \dot{V} \quad (13)$$

である。さて、時間 $[t_i, t_f]$ を時間間隔 Δ に分けてみよう: $t_k = k\Delta + t_i$ ($k = 0, 1, \dots, K$: $t_f \equiv K\Delta + t_i$)。ある 1 ステップでのエネルギーの変化は、(13) に正準方程式 (7) を使うと、次になる:

$$E_{k+1*} - E_{k*} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left. \frac{dE}{dt} \right|_* = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_* \dot{V} = O(\epsilon\Delta). \quad (14)$$

ここで $E_{k*} \equiv H(\Gamma_*(t_k), V(t_k))$ と書き、 $\dot{V} = O(\epsilon)$ を利用した。また、 $\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_* = O(\Delta)$ を仮定した (後で確認する)。(14) は、誤差 $O(\epsilon\Delta)$ を除き、軌道は同じエネルギー面上にあることを表す。

いま、 $\Gamma_*(t_k)$ が次の意味で熱力学的に典型的な点であったとする:

$$\frac{\partial H}{\partial V}(\Gamma_*(t_k), V(t_k)) = \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{H(\Gamma_*(t_k), V(t_k)), V(t_k)}^{\text{mc}}. \quad (15)$$

つまり、時刻 t_k での力学的圧力がそのときのエネルギー E_{k*} のミクロカノニカル平均と一致する。そこからピストンを動かすと、軌道はエネルギー E_{k+1*} 面上に移動する。このとき、 E_{k+1*} 面上の典型的でない点になるかもしれない。だが、今の系はマクロには熱力学的に振舞う系を想定しているので、緩和時間 t_R が経過すれば、再び、 E_{k+1*} 面上の典型的な点に緩和するはずである。従って、 $\Delta \gg t_R$ にとれば、時間 $[t_k, t_{k+1}]$ のほとんどを典型的な点で過ごす。従って、(14) の誤差 $O(\epsilon\Delta)$ を考慮して

$$\frac{1}{\Delta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_{(\Gamma_{k*}, V_k)} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{H(\Gamma_{k*}, V_k), V_k}^{\text{mc}} + O(\epsilon\Delta) \quad (16)$$

が成立する。これが、時間依存した外部パラメータがある場合の、物理的なエルゴード性である¹³。

そして、(16) の両辺に $\dot{V}\Delta$ をかけて、和 $\sum_{k=0}^K$ を取ると、次を得る:

$$\sum_{k=0}^K \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \dot{V} \frac{\partial H}{\partial V}(\Gamma_{k*}, V_k) = \Delta \sum_{k=0}^K \dot{V} \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{H(\Gamma_{k*}, V_k), V_k}^{\text{mc}} + O(\epsilon K \Delta) O(\epsilon\Delta). \quad (17)$$

準静的極限 (10) に従って、 $\epsilon K \Delta = \tau_f - \tau_i$ を固定しながら、 $\epsilon\Delta \rightarrow 0$ にとれば、(11) が成立する。つまり、系の詳細で決まる t_R に対し、 $t_R \ll \Delta \ll \epsilon^{-1}$ となるように ϵ を選ばばよい。

・条件 (12) の成立について $\Delta(\gg t_R)$ に対して、(14) は、(16) より、

$$E_{k+1*} - E_{k*} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \dot{V} \left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_* = \dot{V} \Delta \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{H(\Gamma_{k*}, V_k), V_k}^{\text{mc}} + O(\epsilon^2 \Delta^2) = O(\epsilon\Delta) O(1) \quad (18)$$

となる。これは $\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_* = O(\Delta)$ であることを意味し、そして、 $\Delta(\gg t_R)$ の解像度での時間の関数 $E_*(t)$ は (12) を満たすことを表している¹⁴。

¹³ いわゆるエルゴード定理はここでは考えていない。むしろ、「 $\Delta \gg t_R$ ならば、緩和が生じ、時間平均量は統計平均量で評価できる」という、大自由度系における物理的経験則に動機づけられている [2]。

¹⁴ もしこれよりも細かい解像度で見た場合には、(12) の関数形にはならない。より一般的には、振動数 $\omega \gg 1/t_R$ で振動する有界関数 $g(t)$ を含む、 $E(t) = \bar{E}(\epsilon t) + \epsilon g(t)$ の形をしていると考えられる。そして、 $\Delta t \gg t_R$ で見れば、その振動部分は平均として消える。ゆっくり変化するばね定数の調和振動子 $H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \bar{k}(\epsilon t) q^2$ でこの形を具体的に確認できる。

3.3 断熱定理

断熱定理の直観的説明から始めよう。そのために、定義 (3) における $\Omega(E, V)$ はエネルギー E の超曲面で囲まれた相空間体積であることを思い出す。次に、Liouville の定理 (9) はどのような時間発展であっても、初期の相空間体積は保存することを意味していた。そして、準静条件 (11)(12) から次が言える：相空間内のエネルギー $E_*(0)$ の超曲面上の様々な点から出発した様々な解軌道は各時刻 t (解像度 $\Delta \gg t_R$ で考えて) においてみな共通のエネルギー $E_*(t)$ の超曲面上にある (図 1 右の軌道たちはこれを表している)¹⁵。従って、 $\Omega(E_*(t), V(t))$ は保存する。

次に、これを数式で表そう。そのためには、準静的極限 (10) において、時間の関数としてのエントロピー $S(t) \equiv S(H(\Gamma(t), V(t)), V(t))$ の時間変化を解軌道 $\hat{\Gamma}_*$ に沿って考えればよい：

$$\begin{aligned} S_*(t_f) - S_*(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dS_*}{dt} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\beta_* \frac{dE_*}{dt} - \beta_* \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E_*(t), V(t)}^{\text{mc}} \frac{dV}{dt} \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \beta_*(\partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu)_* + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \beta_*(\tau) \left(\left. \frac{\partial H}{\partial V} \right|_* - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{\bar{E}_*(\tau), \bar{V}(\tau)}^{\text{mc}} \right) \frac{d\bar{V}}{d\tau} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \beta_*(\partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu)_* \\ &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、全体で準静条件 (12) を使い、 $\beta(\tau) \equiv \beta(\bar{E}(\tau), \bar{V}(\tau))$ である。また、2 行目で恒等式 (4) を、3 行目でエネルギー保存則 (13) を、4 行目で準静条件 (11) を¹⁶、最後に正準方程式 (7) を使った¹⁷。

4 熱力学的整合軌道

前節では、解軌道に限定し、(11) と (12) を議論したが、実は、解でなくてもこれらの条件は成立しうる。その重要な例は等温準静過程に対応する軌道である。いま、断熱ピストン系の壁を、熱を透過する壁に置き換え、それをより大きな熱浴に入れた合成系を考えよう。その状態は全体の相空間の点 $\Gamma_{tot} = (\Gamma, \Gamma_B)$ で表され、ハミルトニアンは $H_{tot}(\Gamma_{tot}, V) = H(\Gamma, V) + H_B(\Gamma_B) + H_{int}(\Gamma, \Gamma_B)$ で与えられる。系全体の時間発展は $\dot{\Gamma}_{tot}^\mu = \Omega_{tot}^{\mu\nu} \partial_\nu H_{tot}$ で決まる。このとき、ピストンをゆっくり動かすと、物理的な解軌道 $\hat{\Gamma}_{tot*}$ は (11)(12) を満たす。そして、 $\hat{\Gamma}_{tot*}$ をピストン系の部分相空間へ射影した成分 Γ^μ は、もちろん、ピストン系だけの運動方程式 (7) を満たさない。しかし、アンサンブルの等価性¹⁸のおかげで、その Γ^μ は (11)(12) と同じ形の式を満たす。

¹⁵ もう少し説明しよう。いま、エネルギー E の超曲面上の 2 点 Γ_A と Γ_B それぞれを初期値とする解軌道 $\hat{\Gamma}_{*A}$ と $\hat{\Gamma}_{*B}$ を考える。普通のエネルギー変化は ((14) のように) $\frac{\partial H}{\partial V}(\Gamma(t), V(t))$ のせいで $\hat{\Gamma}_{*A}$ と $\hat{\Gamma}_{*B}$ で異なる値をとる。しかし、もし条件 (11) が満たされていれば、初期エネルギーが同じ ($E = H(\Gamma_A, V(0)) = H(\Gamma_B, V(0))$) なので、(18) に従って、同じエネルギーだけ変化する。よって、 $\hat{\Gamma}_{*A}$ と $\hat{\Gamma}_{*B}$ は、解像度が $\Delta \gg t_R$ である限り、各時刻で共通のエネルギー面上にある。

¹⁶ ここでは、 $\beta_*(\tau)$ はゆっくり変化する熱力学量の関数であることより、 $\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \beta_*(\tau) \left(\frac{\partial H_*}{\partial V} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{\bar{E}_*(\tau), \bar{V}(\tau)}^{\text{mc}} \right) \frac{d\bar{V}}{d\tau} = \sum_{k=1}^K \beta_*(\tau_k) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\tau \left(\frac{\partial H_*}{\partial V} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{\bar{E}_*(\tau), \bar{V}(\tau)}^{\text{mc}} \right) \frac{d\bar{V}}{d\tau}$ と分解し、(11) を使った。

¹⁷ 一般に、 $\partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu = 0$ が断熱条件と見なせる。(13) を熱力学第一法則 $\delta E = \delta Q - p\delta V$ と比較すれば、 $\frac{d'Q}{dt} = \partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu$ と見なすのは自然であろう。さらに「熱=ミクロな構成粒子同士の直接の相互作用によるエネルギーのやり取り」を思い出す。外部のミクロな自由度 Γ' との相互作用 $H_{int}(\Gamma, \Gamma')$ がある場合、系の自由度 Γ の運動方程式は $\dot{\Gamma}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \partial_\nu (H + H_{int})$ のようになり、 $\partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu|_* \neq 0$ となる。従って、理想的な (または近似的な) 断熱系の場合に、 $\partial_\mu H \dot{\Gamma}^\mu = 0$ となる。

¹⁸ 熱力学的圧力がカノニカル平均とミクロカノニカル平均で一致すること。[1] の Supplemental Material を見よ。

従って、条件 (11) と (12) は、断熱準静過程に限らず、任意の熱力学的準静過程¹⁹と整合的なミクロな力学系の軌道 $\hat{\Gamma}$ が満たす条件だと考えられる。そこで、熱力学的整合軌道 (Thermodynamically Consistent Trajectory) を、準静極限 (10) の下で次を満たす軌道 $\hat{\Gamma}$ として定義しよう：

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dV}{dt} \frac{\partial H}{\partial V} = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dV}{dt} \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E(t), V(t)}^{\text{mc}}, \quad E(t) = \bar{E}(\epsilon t) \quad \text{with} \quad \frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} = O(1). \quad (20)$$

熱力学的整合軌道は、必ずしも、与えられた準静操作 $\bar{V}(\epsilon t)$ に応じた実際の時間発展（つまり図 1 左上の準静過程の曲線）を表す相空間軌道ではないことに注意する。というのも、この定義は運動方程式の解かどうかには依存しないからだ²⁰。与えられた $\bar{V}(\epsilon t)$ の下で、選んだ軌道 $\hat{\Gamma}$ に沿ったエネルギー $E(t)$ と仕事 $\int dt \frac{\partial H}{\partial V} \dot{V}$ が、熱力学的準静過程の条件 (11)(12) と同じ形の方程式 (20) を満たすかどうかである。このような意味で熱力学の振る舞いと整合的な軌道たちに作用の定義域を限定したとき、どのような構造が作用に創発されるのかを 6 節で問題にしていこう。

5 ネーターの定理

ネーターの定理は連続的対称性と保存則を結びつける。いま、一般の作用 $I[\hat{q}]$ が与えられたとする。ある変換則 G に従って軌道を無限小変換 $\hat{q} \rightarrow \hat{q} + \delta_G \hat{q}$ させたとき、もし作用の変分 $\delta_G I$ が全微分型になるならば²¹、その系は変換 G に関し対称性があると言う。つまり、次を満たす関数 $\psi(q, \dot{q}, t)$ の存在が変換 G が対称性であるための条件である²²：

$$\delta_G I = \eta \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d\psi(q(t), \dot{q}(t), t)}{dt}. \quad (21)$$

η は無限小パラメータである ($\delta_G = O(\eta)$)。一方で、保存則は、ある物理量 $O_G(t)$ が解軌道 $\hat{q}_*$ に沿って変化しないことである： $\frac{d}{dt} O_G(t)|_* = 0$ 。ネーターの定理はこの保存則と (21) の等価性を与える [3, 4]。

5.1 具体例： $t \rightarrow t + \eta \xi(q, \dot{q}, t)$

次節の準備として、時間の一般座標変換 $t \rightarrow t' = t + \eta \xi(q, \dot{q}, t)$ を考えよう。ここで ξ はある与えられた任意関数である。この講義では変換則を受動的にとらえることにする。すると、これはただの時間座標の取り換えなので、粒子の位置は変化しない： $q'(t') = q(t)$ 。一方で、ピストンの動かし方 ($V(t)$ の関数形) は固定してあるので、 $V'(t') = V(t')$ となる。よって、変換 G は次である：

$$G: \quad t \rightarrow t' = t + \eta \xi(q, \dot{q}, t), \quad q(t) \rightarrow q'(t') = q(t), \quad V(t) \rightarrow V'(t') = V(t'). \quad (22)$$

この変換 G に対する変分 $\delta_G I$ を求めよう。そのために、任意の関数 $f(t)$ に対する変換則が

$$\begin{aligned} \delta_G f &\equiv f'(t') - f(t) \\ &= f'(t) - f(t) + \eta \xi \frac{df}{dt}(t) + O(\eta^2) \\ &\equiv \left(\bar{\delta}_G + \eta \xi \frac{d}{dt} \right) f + O(\eta^2) \end{aligned} \quad (23)$$

¹⁹ 任意の熱力学的準静過程は断熱準静過程と等温準静過程の組み合わせで構成できることに注意せよ。

²⁰ もちろん、実際の時間発展は解軌道が与える。それは熱力学的整合軌道（図 1 の相空間の軌道の一つ）であり、熱力学的状態空間の断熱曲線を表す。ちなみに、解でない熱力学的整合軌道が一般にどれだけたくさん存在するのかは不明である。

²¹ この変分の計算をするとき、運動方程式を使ってはいけない。

²² なぜこれが対称性の条件なのか？実は、この条件が満たされているとき、解 $\hat{q}_*$ を変換した $\hat{q}_* + (\delta_G \hat{q})_*$ も解になっている。この意味で dynamical symmetry と呼ばれる [4]。具定例 (22) の場合には、これを簡単にみることができる [1]。

で与えられることを利用する。ここで $\bar{\delta}_G$ は関数形自体の変化を表している。これを使うと次を得る²³：

$$\bar{\delta}_G q = -\eta \xi \dot{q}, \quad \bar{\delta}_G \dot{q} = -\eta \frac{d}{dt}(\xi \dot{q}), \quad \bar{\delta}_G V = 0. \quad (24)$$

さらに、これを使えば次が示せる²⁴：

$$\begin{aligned} \delta_G I &\equiv \int_{t'_i}^{t'_f} dt' L(q'(t'), \dot{q}'(t'), V'(t')) - \int_{t_i}^{t_f} dt L(q(t), \dot{q}(t), V(t)) \\ &= \eta \int_{t_i}^{t_f} dt \left(-\xi \dot{q} \mathcal{E} - \frac{d}{dt}(\xi E) \right) + O(\eta^2). \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\mathcal{E} \equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ であり、 E はエネルギー (2) である。これは任意の関数 ξ に対して成立する。

いま、ある特別な ξ が対称性だとすると、(21) が成立する。それと (25) を等号で結べば、

$$-\int_{t_i}^{t_f} dt \xi \dot{q} \mathcal{E} = (\psi + \xi E)|_{t_i}^{t_f} \quad (26)$$

を得る。従って、これを満たす ψ が存在することが、変換 (22) が対称性であるための条件である。このとき、ネーターの定理がすぐにわかる。解軌道 $\hat{q}_*$ は $\mathcal{E}_* = 0$ を満たし、(26) の右辺がゼロになる。よって、その軌道上のどの2つの時刻でも量 $\psi + \xi E$ が同じである。つまり、 $\psi + \xi E$ が保存する²⁵。

6 対称性の導出

では、これまでの準備に基づいて、エントロピー保存則 (19) に対応する対称性を導出しよう。そのために、時間の一般座標変換 (22) の特別な場合として、

$$t \rightarrow t' = t + \eta \Xi(E(q, \dot{q}, V(t)), V(t)) \quad (27)$$

というものを考える。つまり、エネルギー $E(q, \dot{q}, V(t))$ と体積 $V(t)$ というマクロな量によって生じる時間の一般座標変換である。これが対称性であるための条件は、(26) を満たす ψ が存在することである。それは $\Psi(E(q, \dot{q}, V(t)), V(t))$ という形をしていると期待できる。従って、もし

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \Xi \left(\frac{dE}{dt} - \frac{\partial H}{\partial V} \dot{V} \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} (\Psi + \Xi E) \quad (28)$$

を満たす Ψ が存在すれば、(27) は対称性である。ここで、恒等式 $\frac{dE}{dt} = -\dot{q} \mathcal{E} + \frac{\partial H}{\partial V} \dot{V}$ を使った²⁶。ところで、エントロピーは断熱準静過程でのみ保存したことを思い出すと、この対称性条件 (28) は一般的には満たされないと考えられる。そこで、準静極限操作 (10) をとり、作用 (1) の定義域を熱力学的整合軌道 (20) に限定しよう。まず、(20) の下で (28) を等価変形すると、対称性条件を満たす変換が確かに存在することがわかる (Step1)。次に、熱力学的性質を利用し (Step2)、さらに次元解析をすることにより (Step3)、その変換の候補が一つに絞られる。それがエントロピーを導く対称性である。

²³宿題6：(24)を確認せよ。ヒント： $\dot{q}'(t') \equiv \frac{dq'(t')}{dt'} = (1 - \eta \dot{\xi}) \dot{q}(t)$ を示し、定義 $\delta_G \dot{q} \equiv \dot{q}'(t') - \dot{q}(t)$ を利用せよ。

²⁴宿題7：(25)を示せ。ヒント：まず、ヤコビアンに注意して t 座標で書き直し、(23)を適用して、 $\delta_G I = \int_{t_i}^{t_f} dt (\delta_G L + \eta \frac{d}{dt}(\xi L)) + O(\eta^2)$ を示す。そして、 $\bar{\delta}_G L$ に (24) を適用する。

²⁵特別な例：もし V が一定ならば、時間の一様並進対称性 ($\xi = 1$) が存在して、エネルギー E が保存する ($\psi = 0$)。実際に、(28) で $\dot{V} = 0, \xi = 1$ と置けば、保存量 $\psi + \xi E = E$ がすぐにわかる。

²⁶宿題8：エネルギーの定義式 (2) を全微分して、これを示せ。

Step1 準静極限 (10) をとり、熱力学的整合軌道の定義 (20) を利用すると、(28) は次になる：

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \Xi \left(\frac{d\bar{E}}{d\tau} - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{\bar{E}(\tau), \bar{V}(\tau)}^{\text{mc}} \frac{d\bar{V}}{d\tau} \right) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau} (\Psi + \Xi \bar{E}). \quad (29)$$

ここで $\Xi(\bar{E}, \bar{V})$, $\Psi(\bar{E}, \bar{V})$ であるので、この式の力学変数は $\bar{E}(\tau)$ だけである。つまり、熱力学的整合軌道に限定することにより、相空間のミクロなダイナミクス $\Gamma(t)$ が熱力学的状態空間のマクロなダイナミクス $\bar{E}(\tau)$ に簡約された。以下では、 $\bar{E}, \bar{V}$ をただ E, V と書く。

準静極限 (10) 下では (29) は任意の τ_f に対し成立するべきなので、被積分関数で等号が成立する：

$$\Xi \left(dE - \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E,V}^{\text{mc}} dV \right) = d(\Psi + \Xi E). \quad (30)$$

これを眺めると、右辺が2変数 E, V の全微分になっていることに気づく。従って、この条件が満たされるためには、左辺も全微分でなければならない。つまり、対称性条件 (29) は全微分条件

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial V} \right)_E = \left(\frac{\partial}{\partial E} \left(-\Xi \left\langle \frac{\partial H}{\partial V} \right\rangle_{E,V}^{\text{mc}} \right) \right)_V \quad (31)$$

に書き換えられる。これを右辺にまとめ、そして次のように変形することができる：

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial V} \left(\Xi \beta^{-1} \frac{\partial S}{\partial E} \right) - \frac{\partial}{\partial E} \left(\Xi \beta^{-1} \frac{\partial S}{\partial V} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial V} (\Xi \beta^{-1}) \frac{\partial S}{\partial E} - \frac{\partial}{\partial E} (\Xi \beta^{-1}) \frac{\partial S}{\partial V} \\ &\equiv \left| \frac{\partial(\Xi \beta^{-1}, S)}{\partial(V, E)} \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、一行目は恒等式 (4) を利用し、二行目は互いにキャンセルする項があることに注意し、そして、三行目は関数行列式である。この解は

$$\Xi \beta^{-1} = \mathcal{F}(S) \quad (33)$$

である²⁷。ここで $\mathcal{F}(S)$ はエントロピー S の任意関数であり、特にそれは V に陽に依らない。こうして、熱力学的整合軌道に対して、 $\Xi = \beta \mathcal{F}(S)$ という対称性が出現することが示された²⁸。そのネーター保存量は、(26) の結果を利用すれば、

$$\Psi + \Xi E = \int^S dS' \mathcal{F}(S') \quad (34)$$

であることがわかる²⁹。つまり、エントロピーの任意関数が保存する。

Step2 熱力学的性質を要請し、 $\mathcal{F}(S)$ の関数形を絞り込もう。いま、ネーター保存量 (34) が示量的だとする。示量的な量 A とは、系のサイズを（その材質は同じままで）スケール倍 $(V, N) \rightarrow (\lambda N, \lambda V)$

²⁷宿題9： $u_1 = f_1(x_1, x_2)$, $u_2 = f_2(x_1, x_2)$ に対し、 $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0$ かつ $\left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = 0$ であるとする。このとき、 u_1 と u_2 が関数関係 $u_2 = g(u_1)$ にあることを示せ。ヒント： $x_1 = x_1(u_1, x_2)$ と解きなおし、 (u_1, x_2) を独立変数と見なし、そして、 $u_1 = f_1$, $u_2 = f_2$ をそれぞれ x_2 で微分してみよ。すると、 $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$ がわかる。

²⁸等温系の熱力学的整合軌道に対しては、熱浴との相互作用のせいで、この対称性は存在しない。

²⁹宿題10：(34) を示せ。ヒント：(33) を (30) の左辺に代入し、(4) を使えばよい。

したとき、同じく $A \rightarrow \lambda A$ となる量のことである。エネルギーはその例である。すると、 $\Psi + \Xi E \rightarrow \lambda(\Psi + \Xi E)$ となる。よって、 Ψ は示量的であり、 Ξ は示強的である。また、温度 β も示強的であるので、(33) より、 $\mathcal{F}(S)$ は示強的である。ところで、 $\mathcal{F}(S)$ は陽には V に依存しない。従って、そのような示強的な関数は 1 粒子当たりエントロピー $s \equiv \frac{S}{N}$ の関数である： $\mathcal{F}(S) = \bar{\mathcal{F}}(s; M)$ 。ここで s の関数形が材質 M にどのように依存するかを陽に表した。

熱力学的な系の大切な性質の一つは相加性である³⁰。いま、材質 M_A と M_B からなる部分系 A,B が互いに熱的に接触し、一つの合成系を成し、作用 (1) で表されているとする。このとき、全体で時間は一樣なので、変換 (27) の Ξ はどこでも同じである： $\Xi_A = \Xi_B$ 。また、平衡では温度 β^{-1} は互いに等しい： $\beta_A = \beta_B$ 。従って、(33) より、次が成立する：

$$\bar{\mathcal{F}}(s_A; M_A) = \bar{\mathcal{F}}(s_B; M_B). \quad (35)$$

もし $M_A = M_B = M$ ならば、(35) は $\bar{\mathcal{F}}(s_A; M) = \bar{\mathcal{F}}(s_B; M)$ となる。これは任意の s_A, s_B に対して成立するので³¹、 $\bar{\mathcal{F}}$ は s に依らないことがわかる： $\bar{\mathcal{F}}(s; M) = c(M)$ 。今度は、もし $M_A \neq M_B$ ならば、(35) は、 $c(M_A) = c(M_B)$ がどんな M_A, M_B にも成り立つことを意味する。従って、 $\bar{\mathcal{F}}$ は M にも依らない普遍的な定数であることがわかる： $\bar{\mathcal{F}} = c_0$ 。

Step3 上記のように、 $\mathcal{F}$ は系の状態にも詳細にも全く依存しない不変定数 c_0 であることがわかった。ここで、(33) に対して次元解析を適用すると、 c_0 は作用の次元をもつことがわかる。そのような普遍的な定数は Planck 定数 $\hbar$ しかありえない： $c_0 = a\hbar$ (a : 比例定数)。

結果 以上より、(27) と (33) と $\mathcal{F} = \hbar$ ($a = 1$ として) より、作用 (1) の定義域を熱力学的整合軌道 (20) に限定すると

$$t \rightarrow t + \eta \hbar \beta(E(t), V(t)) \quad (36)$$

という対称性が出現することがわかった³²。そのネーター保存量 (34) はエントロピーそのものである：

$$\Psi + \Xi E = \hbar S. \quad (37)$$

こうして、熱力学エントロピーはこの対称性 (36) のネーター保存量として一意的に特徴づけられる³³。

7 未来へ

この対称性 (36) は一体何を意味しているのだろうか？それを理解するには、「対称性によってエントロピーを特徴づける」という考え方を様々な方向から推し進め、そこから得られる知見を集めていく必要がある。ここでは二つの発展を紹介する。

7.1 熱力学的状態空間上の経路積分とエントロピー保存則

「対称性によってエントロピーを特徴づける」という見方は量子論でも成立するだろうか？また、この対称性があるときエントロピーが保存するが、この対称性が破れているときエントロピーは増大するだろうか？

³⁰ 2つの（異なる材質でもよい）系を合わせて1つの系と見なすとする。その合成系の平衡状態を、元の2つの系の平衡状態を特徴づける量の和によって特徴づけることができる量を相加的な量という。例：エネルギー、エントロピー。

³¹ 各体積 V_A, V_B を変えることにより、 s_A, s_B の値を自由に変えることができる。

³² これは、エネルギー保存則に対応する $t \rightarrow t + \eta$ と大きく異なり、時間についての非一樣な並進であることに注意しよう。しかも、 $\beta(H(\Gamma(t), V(t)), V(t))$ のように、系の状態 Γ に依存する対称性である。

³³ 導出手順から一意性が言える。もし V を固定すると、系は時間並進対称性を持ち、エネルギーの任意関数が保存する。詳しくは [1] の Supplemental Material をみよ。

いま、時間依存した外場 $h(t)$ 中における熱的に孤立した量子多体系（例：磁場中のスピン系）を考え、ハミルトニアンを $\hat{H}(h(t))$ とする。熱力学では、この系の平衡状態は熱力学的状态空間上の点 (E, h) で表される。一方、量子力学では、系の波動関数 $|\Psi(t)\rangle$ の時間発展はミクロな力学変数 q の経路積分で表せる。我々は熱力学的状态空間上の経路積分として波動関数を表した [5] (図 2)。

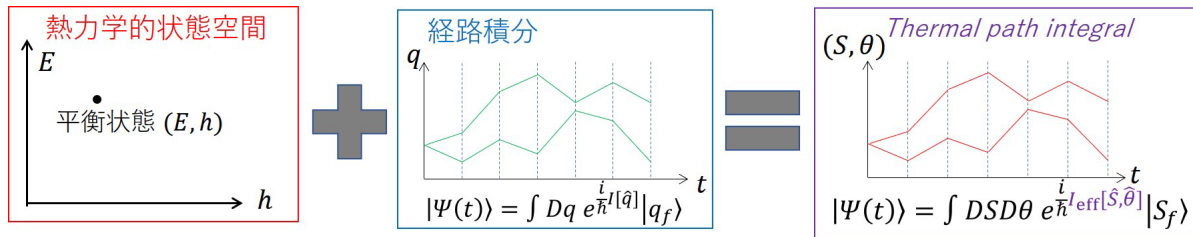


図 2: 熱力学的状态空間上の経路積分表示としての波動関数

まず、通常の経路積分表示を作るとき、各時刻における完全系 $1 = \int dq |q; t\rangle \langle q; t|$ を構成し、プロパゲーター $\langle q'; t' | q; t \rangle$ を評価し、そして、連続極限をとることを思い出す。そこで、熱力学の変数 (E, h) でラベルされる完全系を構成し、相当するプロパゲーターを $N \gg 1$ の性質を利用して評価し、最後に補助的な力学変数 $\theta(t)$ を導入する。すると、次を得る³⁴：

$$|\Psi(t)\rangle = \int \mathcal{D}S \mathcal{D}\theta e^{\frac{i}{\hbar} I_{eff}[\hat{S}, \hat{\theta}]} |S_f, h_f\rangle. \quad (38)$$

$I_{eff}[\hat{S}, \hat{\theta}]$ が熱力学的状态量を力学変数としたときの有効作用である。

特に、外場 $h(t)$ がゆっくり変化するとき、有効作用は

$$I_{eff}[\hat{S}, \hat{\theta}] = \int dt \left[-E(S(t), h(t)) - \hbar \theta(t) \frac{dS(t)}{dt} + o(N) \right] \quad (39)$$

の形をしている。これは組 $(S, \hbar\theta)$ が正準共役であることを示している。この運動方程式は $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\hbar\beta}$ である。つまり、エントロピーは保存し、時間 t と変数 θ の間には $dt = \hbar\beta d\theta$ の関係がある。実は、この準静的操作の下では、有効作用 (39) だけでなく、波動関数 (38) のレベルで、

$$\theta \rightarrow \theta + \eta \quad (40)$$

という対称性が現れる³⁵。その結果、エントロピー演算子 $\hat{S}(h) \equiv \log D(\hat{H}(h), h)$ の期待値 $\langle \Psi(t) | \hat{S}(h(t)) | \Psi(t) \rangle$ が保存する ($D(E, h)$: 状態密度)。ここで、 $dt = \hbar\beta d\theta$ と (40) を組み合わせれば、この対称性はまさに (36) の形をしていることがわかる：

$$\theta \rightarrow \theta + \eta \iff t \rightarrow t + \eta \hbar \beta. \quad (41)$$

このように、古典論に基づいて得られた「対称性によってエントロピーを特徴づける」という見方は量子論でも成立する。だが、両者の定式化は大きく異なり、その関係性は明確ではない。もう一つ注目すべきことは、(38) は任意の操作過程 $h(t)$ に対して適用できることである。従って、それは非平衡過程も表現できるので、この定式化から第二法則を調べられる可能性がある。

³⁴ ここで、熱力学の関係式 $S = S(E, h)$ より、与えられた h の下で、 E の代わりに S を独立変数にしてある。

³⁵ 実は (38) は非自明な積分測度をもつが、準静的操作では (40) の下で不変である。

7.2 蒸発するブラックホールのエントロピー

Hawking は、星が重力崩壊しブラックホールになる過程の時空上で、量子場の時間発展を解いた [6]。その時間変化する時空中で粒子が生成され、ブラックホールはエネルギーを放出することが示された (Hawking 輻射)。注目すべきは、質量 M のブラックホールの場合、その粒子数分布が温度

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M} \quad (42)$$

の Planck 分布 (ただし graybody factor を含む) の形をしていることである³⁶。つまり、ブラックホールは同じ温度 T_H の熱浴と平衡になる熱力学的物体であると考えられる。

いま、ブラックホールを熱浴中で可逆的に形成することを考える。その過程でブラックホールに蓄えられるエントロピーは、Clausius 関係式 $\delta S = \frac{\delta Q}{T}$ を使い、 $\delta Q = d(Mc^2)$ と解釈すれば、次のように計算される：

$$S_{BH} = \int \frac{dQ}{T} = c^2 \int_0^M \frac{dM'}{T_H(M')} = c^2 \frac{8\pi G}{\hbar c^3} \frac{M^2}{2} = \frac{A}{4l_p^2}. \quad (43)$$

ここで、 $a = \frac{2GM}{c^2}$ を Schwarzschild 半径としたとき、 $A = 4\pi a^2$ はブラックホールの表面積であり、 $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35}\text{m}$ は Planck 長さである。従って、ブラックホールは 3 次元空間の物体であるにも関わらず、その 2 次元表面積でエントロピーが与えられる (ホログラフィ性)。では、Boltzmann のエントロピー (3) の立場から見た場合、その微視的起源は何だろうか？それは未だに明確な答えはない。

一般相対論は一般座標変換に対し不変な理論である。実は、定常なブラックホールのエントロピーは、ホライズン上の特別な時間 v の変換³⁷

$$v \rightarrow v + \eta \hbar \beta_H \quad (44)$$

に関するネーターチャージとして定式化することができる [7]。ここで β_H は Hawking 温度 (42) の逆温度である ($\beta_H = 1/T_H$)。この物理的な意味は未だにわからない。だが、注目すべきは、この対称性 (44) は本講義の結果である対称性 (36) と同じ形をしている点である。

さて、Hawking 輻射の発見により、量子論的にはブラックホールは蒸発することがわかった。しかし、これと「古典論的にはブラックホールはホライズンの存在によって特徴づけられる」を同時に考慮すると問題が生じる。いま、物質の崩壊によりブラックホールが形成されたとする。従来の議論では、物質は自らの情報を保ったまま Schwarzschild 半径を通り過ぎ、ホライズンが形成され、そして Hawking 輻射が放出される。このとき、エネルギーは出ていくが、中に入った情報はホライズンにより出てこられない。よって、輻射に初期状態が反映しない。もしそのまま完全に蒸発すると、情報は消えてしまう (情報問題)。この意味で、ホライズンの存在は量子力学の原理と整合的ではない。

では、量子力学における“ブラックホール”とは一体何なのだろうか？そこで、我々は、量子力学の枠組みで物質と時空の両方のダイナミクスを同時に考えて、物質が重力崩壊したら一体何ができるのかをもう一度考えた [8, 9]。具体的には、半古典的 Einstein 方程式³⁸を self-consistent に解き、4 次元球対称崩壊物質の時間発展を解析した。ここで重要なのは、時間依存した計量では粒子生成が一般に生じるため、物質が崩壊している最中で、Hawking 輻射がホライズン形成前に生じることである。この蒸発により時空も時間変化的こと (back reaction) を考慮しながら物質の運動を解析すると、

³⁶ただし、この計算は pure state (真空状態) で行われているため、通常の thermal state での Planck 分布ではない。

³⁷ v はホライズン上の Killing パラメータである。

³⁸時空は古典的計量 $g_{\mu\nu}$ として、物質は量子場 $\hat{\phi}$ として扱い、その時間発展方程式は $G_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ とする近似。ここで、 $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$ はエネルギー運動量テンソル演算子のある状態での期待値である。これは一種の平均場近似である。

物質はそれ自身の Schwarzschild 半径を決して通り過ぎないことがわかった³⁹。その結果、物質はそのまま小さくなり、ホライズンも特異点もない半径 $R = a + \frac{2\sigma}{a}$ の高密度な星になり、そして蒸発する (図 3)。ここで σ は Hawking 輻射の強度を表すが、 $a \gg \frac{2\sigma}{a}$ であるために、外からこれを見るとほとんど従来のブラックホールのようにみえる。これが量子的なブラックホールの候補である。

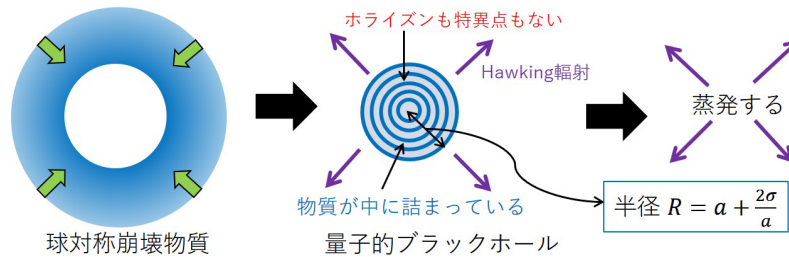


図 3: 半古典的 Einstein 方程式の self-consistent な解としての蒸発するブラックホール

その内部には崩壊物質と Hawking 輻射が詰まっており、最終的にはその情報は戻ってくると期待できる [9]。特に、熱浴中で可逆的に形成された定常なブラックホールの場合には、内部のエントロピー密度 s を評価することができ、それを内部の固有体積で積分すると、

$$S = \int_V dV s = \frac{A}{4l_p^2} \quad (45)$$

となる。これは情報が内部に保存されていることを示唆している。

物質と時空のダイナミクスを同時に扱った結果 (45) と、(36) と (44) の類似性は、物質と時空のエントロピーを対称性から統一的に定式化できる可能性を示唆しているのではないだろうか。

参考文献

- [1] S. i. Sasa and Y. Yokokura, Phys. Rev. Lett. **116**, no. 14, 140601 (2016) [arXiv:1509.08943].
- [2] ランダウリフシツ、「統計物理学 (上)」(岩波書店)
- [3] 山本義隆、中村孔一、「解析力学 1, 2」(朝倉書店)
- [4] W. Sarlet and F. Cantrijn, SIAM Rev. **23**, 467 (1981).
- [5] S. i. Sasa, S. Sugiura and Y. Yokokura, arXiv:1611.07268.
- [6] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [7] R. M. Wald, Phys. Rev. D **48**, no. 8, R3427 (1993) [gr-qc/9307038].
- [8] H. Kawai, Y. Matsuo and Y. Yokokura, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350050 (2013) [arXiv:1302.4733 [hep-th]].
- [9] H. Kawai and Y. Yokokura, Phys. Rev. D **93**, no. 4, 044011 (2016) [arXiv:1509.08472].

³⁹注意すべきは、質量 M の球対称な星の Schwarzschild 半径は $a = \frac{2GM}{c^2}$ と計算できるが、だからと言って、この星がホライズンをもつとは限らないことである (例: 地球)。一般に、球対称の場合、その星の半径 R がその内部の物質の質量 M で決まる Schwarzschild 半径 a よりも小さくなった時 ($R < a$)、ホライズン (trapped surface) ができる。