

# 可解量子スピン鎖と場の理論：散乱行列から共形不変性まで

東京大学大学院 情報理工学系研究科 松井 千尋

## 概要

ハミルトニアンに対角化は、量子力学系の時間発展を知る上で重要な問題である。一般の量子系におけるハミルトニアンに対角化は困難であるが、量子可積分系では解析的な手法によるハミルトニアンへの厳密対角化が可能である。この講義ノートでは、なぜ量子可積分系でハミルトニアンへの厳密対角化が可能なのか、可解量子スピン鎖と場の理論の対応関係とは何か、またそれが共形場理論とどう関係するかを解説する。

## 1 はじめに

可積分と聞くと、何か小難しく、現実離れしたものをイメージする人も多いのではないだろうか。しかし、実は可積分系が数理物理分野に限らず、物性分野や素粒子分野の様々な場面で顔を覗かせていることをご存知だろうか？可積分系とは、系の自由度に対して十分な数の保存量を与える高い対称性を持つ系である。ここでは、特に散乱行列が厳密に求まる系を取り上げ、それをベータ仮設法を用いて解く方法を紹介する。ベータ仮設法は、量子スピン鎖の固有状態を求めるための手法としてベータにより提案され<sup>1)</sup>、その後バクスター<sup>2)</sup>によって古典二次元格子系へ広く応用された。最近では、トポロジカル秩序の理論を取り扱うための数学とも深く関連することが指摘されて、物性理論において幅広く利用されている。一方、素粒子分野でもベータ仮設法は標準的な手法の一つとなっている。量子場の理論における形状因子の計算をはじめ、近年注目を集めている AdS/CFT 対応においても重要な役割を担う。興味深いのは、一見全く違って見える物理系が、可積分の観点では等価になることである。量子 XXZ スピン鎖、6 頂点模型、量子サイン・ゴールドン模型がその例にあたる。このように、可積分系は物性理論と素粒子理論の架け橋となり得る。この講義ノートでは、量子 XXZ スピン鎖と量子サイン・ゴールドン模型を例にとり、可積分系としての特徴や両者の対応関係を、未解決な問題を取り上げながら解説する。

## 2 ベータ仮設法による量子 XXZ スピン鎖の厳密対角化

可積分系の可解性を保証するのは、系の自由度に対して十分な数の保存量である。では、どのような系がこの特徴を持つだろうか？

例として、スピン 1/2 の場合の量子 XXZ スピン鎖

$$H = J \sum_{j=1}^N \left( S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \frac{J_z}{J} S_j^z S_{j+1}^z \right) \quad (1)$$

を考える。ここで  $S_j^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) は  $j$  番目の空間に作用するスピン演算子であり、パウリ行列を用いて  $S_j^\alpha = \sigma_j^\alpha / 2$  と表される。周期的境界条件を課し、 $S_{N+1}^\alpha = S_1^\alpha$  とする。 $J_z/J$  は異方性を表す変数であり、その値に応じて相転移が起こる (図 1)。  $J_z/J = 1$  のとき等方的な量子ハイゼンベルグスピン鎖となる。ハミルトニアンへの対角化は、ベータ仮設法を用いて行われる<sup>1, 3)</sup>。ベータ仮設法はどのような値の  $J_z/J$  に対しても適用できるが、いまはギャップレス領域に興味があるので

$|J_z/J| \leq 1$  の場合のみ考えることにする .

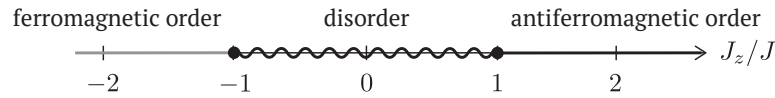


図 1: 異方性変数  $J_z/J$  の値による基底状態の変化 .  $|J_z/J| \leq 1$  ではギャップなし ,  $|J_z/J| > 1$  ではギャップありの励起となる .

ベーテ仮設法を用いる準備として , スピン鎖の状態を粒子で記述することを考える . スピン鎖上での粒子の定義には二通りの方法がある . 一つ目は下向きスピンを粒子と見る方法で , 粒子はマグノンと呼ばれる . このとき真空は強磁性状態 (全てのスピンの上を向いた状態) で与えられる . 二つ目は , 基底状態を真空と取る方法で , 粒子はスピノンと呼ばれる . 古典的には , ネール状態と与えられる基底状態中に生じたドメインウォールで定義される (図 2) . ベーテ仮設法で解くことので

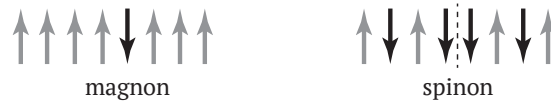


図 2: 量子スピン鎖におけるマグノン励起とスピノン励起 . 右図の点線は , ネール状態に生じたドメインウォールを表している .

きるスピン鎖では , 任意のスピノン多体散乱が順序によらない二体散乱に分解できる . このことを記述するのがヤン・バクスター方程式である . スピノン  $i$  とスピノン  $j$  の間の散乱行列を  $R_{ij}$  と書くと , ヤン・バクスター方程式は

$$R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2)R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3)R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3)R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3)R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (2)$$

で与えられる (図 3) .  $R$  行列が持つ変数は , 散乱する二つのスピノンのラピディティ差を表している . 量子 XXZ スピン鎖におけるスピノン散乱を表すヤン・バクスター方程式の解は , スピノン磁

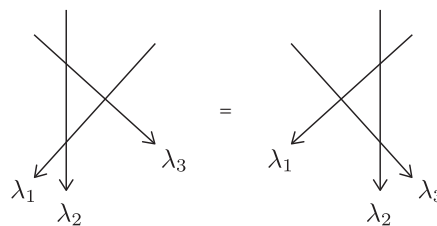


図 3: ヤン・バクスター方程式 . 矢印は散乱過程の時間発展の向きを表す . 三体の散乱が順序によらない二体散乱に分解できることに対応している .

化の符号  $\{++, +-, -+, --\}$  を基底にとると

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh \lambda}{\sinh(\lambda+i\gamma)} & \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\lambda+i\gamma)} & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\lambda+i\gamma)} & \frac{\sinh \lambda}{\sinh(\lambda+i\gamma)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる . ここで  $\gamma$  は  $J_z/J = \cos \gamma$  で異方性を決定する変数である . 非ゼロ成分の配置はスピノンの磁化保存則に対応しており , マグノン描像では粒子数が保存されることを意味している .

量子 XXZ スピン鎖の転送行列は  $R$  行列を用いて構成できる． $j$  番目のサイトのスピン空間を  $j$  と記す．さらに 0 番目の空間として補助空間を導入すると，転送行列は

$$T(\lambda) = \text{tr}_0 [R_{0N}(\lambda) \cdots R_{01}(\lambda)] \quad (4)$$

で与えられる．補助空間の状態が，時間発展に対する系全体の磁化の変化を決めることが図 4 からわかる．(4) のトレースの下添え字 0 は，このトレースが補助空間に対して取られたものであることを表しており，周期的境界条件に対応している．(4) を

$$\begin{array}{c} \tau_1 \qquad \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \tau_N \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ \tau_0 \longrightarrow \tau'_0 \\ \tau'_1 \qquad \qquad \dots \qquad \qquad \qquad \tau'_N \end{array} \quad \begin{array}{l} A : (\tau_0, \tau'_0) = (+, +) \Rightarrow \tau'_1 + \cdots + \tau'_N = \tau_1 + \cdots + \tau_N \\ B : (\tau_0, \tau'_0) = (+, -) \Rightarrow \tau'_1 + \cdots + \tau'_N = \tau_1 + \cdots + \tau_N - 1 \\ C : (\tau_0, \tau'_0) = (-, +) \Rightarrow \tau'_1 + \cdots + \tau'_N = \tau_1 + \cdots + \tau_N + 1 \\ D : (\tau_0, \tau'_0) = (-, -) \Rightarrow \tau'_1 + \cdots + \tau'_N = \tau_1 + \cdots + \tau_N \end{array}$$

図 4: 各演算子  $A$ - $D$  の作用．粒子数保存則より  $\{\tau_j\}$  と  $\{\tau'_j\}$  の関係が決まる．

$$T(\lambda) = T(0) \left[ 1 + \lambda \frac{T'(0)}{T(0)} + \cdots \right] \quad (5)$$

と  $\lambda = 0$  まわりでテイラー展開したとき，第一項は運動量演算子，第二項はハミルトニアン (1) を与えることが確認できる．また，ヤン・バクスター方程式を用いると，(4) で定義される転送行列が交換する  $[T(\lambda), T(\mu)] = 0$  ことを示せる．したがって，量子 XXZ スピン鎖は交換する転送行列から得られる無限個の保存量を持つ可積分系であることがわかる．言い換えると，ヤン・バクスター方程式の解を散乱行列として持つ模型はベーテ仮設法で解くことができる．

次に，ベーテ仮設法を用いて転送行列を対角化する．まず，(4) で出てきた  $R$  行列の積を補助空間における行列と見なし，

$$R_{0N}(\lambda) \cdots R_{01}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}_0 \quad (6)$$

と書く．ここで行列要素  $A, B, C, D$  は 1 番目から  $N$  番目までの空間に作用する演算子であることに注意する．演算子  $A$ - $D$  の間に成り立つ交換関係はヤン・バクスター方程式 (2) を繰り返し用いることで導かれる．ベーテ仮設法は，転送行列およびその固有状態を  $A$ - $D$  で表し，演算子の間に成り立つ代数関係式を用いて固有値問題を解く方法である．(4), (6) から，転送行列は  $T = A + D$  と表せる． $A$  と  $D$  はマグノンの個数を保存する演算子であり，

$$A(\lambda)|\Omega\rangle = a(\lambda)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle, \quad D(\lambda)|\Omega\rangle = d(\lambda)|\Omega\rangle = \left( \frac{\sinh \lambda}{\sinh(\lambda + i\gamma)} \right)^N |\Omega\rangle \quad (7)$$

と，真空  $|\Omega\rangle$  を固有状態に持つ．一方， $B$  はマグノンの生成演算子， $C$  は消滅演算子と考えることができる (図 4)．したがって， $n$  個のマグノンが存在する状態は，真空  $|\Omega\rangle$  に演算子  $B$  を  $n$  回作用させて得られる．交換関係

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\mu) &= \frac{\sinh(\lambda - \mu - i\gamma)}{\sinh(\lambda - \mu)} B(\mu)A(\lambda) + \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\lambda - \mu)} B(\lambda)A(\mu), \\ D(\lambda)B(\mu) &= \frac{\sinh(\lambda - \mu + i\gamma)}{\sinh(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{\sinh(i\gamma)}{\sinh(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu), \\ [B(\lambda), B(\mu)] &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

より，もし第一式と第二式の右辺第二項がゼロであれば，演算子  $B$  で生成されるベクトルは転送行列の固有状態となる．この条件は

$$\left( \frac{\sinh(\lambda_j + i\gamma)}{\sinh \lambda_j} \right)^N = \prod_{l=1; l \neq j}^n \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_l + i\gamma)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_l - i\gamma)} \quad (9)$$

で与えられ，ベーテ方程式と呼ばれる．したがって，演算子  $B$  で生成されるベクトルにベーテ方程式の解 (ベーテ根) を代入したものは固有状態を与える．これより，転送行列の固有値は

$$t(\lambda) = a(\lambda) \prod_{j=1}^n \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j - i\gamma)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} + d(\lambda) \prod_{j=1}^n \frac{\sinh(\lambda - \lambda_j + i\gamma)}{\sinh(\lambda - \lambda_j)} \quad (10)$$

と計算できる．ここで，(9) の左辺を  $\exp(ik_j N)$  と置くと

$$e^{ik_j N} = \prod_{l=1; l \neq j}^n S(k_j, k_l) \quad (11)$$

の形となるが，これはまさに運動量  $k_j, k_l$  を持つマグノン間の散乱行列を  $S(k_j, k_l)$  としたとき，周期境界条件下で起こる位相シフトを表している．

一般にベーテ方程式を有限の  $N$  に対して解くことは困難である．しかし  $n/N$  の値を保ったまま  $N \rightarrow \infty$  を取る極限 (熱的極限) では，解がストリング状に分布することが知られている<sup>4, 5)</sup>．特に，基底状態では実軸上に解が分布する (1 ストリング解)．この性質を用いることでエネルギー固有値や相関関数を厳密に計算することができる<sup>6)</sup>．それぞれのベーテ根にはベーテ量子数  $Q_j$  が割り当てられており，それによって固有状態は特徴付けられる．ベーテ量子数はベーテ方程式 (9) の対数から

$$Q_j = Q(\lambda_j) = \frac{N}{2\pi i} \ln \frac{\sinh(\lambda_j + i\gamma)}{\sinh \lambda_j} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^n \ln \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_l + i\gamma)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_l - i\gamma)} \quad (12)$$

と定義できる<sup>7)</sup>． $Q_j$  の取りうる範囲は，

$$|Q_j| \leq Q_{\max} = Q(\infty) \quad (13)$$

である． $Q_j$  の取りうる値のうち，未占有部分はホールと呼ばれる．ホールは励起粒子を表し，スピノンに対応する．

### 3 量子 XXZ スピン鎖の低エネルギー有効場理論

ギャップレス励起を持つ一次元量子系の低エネルギー状態はラッティンジャー液体と呼ばれ，相対論的な量子場の理論 (有効場理論) で記述できることが知られている (詳しくは<sup>8)</sup> 参照)．この有効場理論は，共形不変な場の理論に摂動をかけたもので与えられる．量子 XXZ スピン鎖の有効場理論はボゾン化という操作によって得られる．ボゾン化は，一次元フェルミ粒子系における密度波をボゾン場と関連づける手法である．ここでは，量子 XXZ スピン鎖の低エネルギー領域が量子サイン・ゴールドン模型で記述できることをボゾン化を用いて示す．

まず，スピン演算子をフェルミオン  $f_j, f_j^\dagger$  を用いて

$$S_j^z = f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2}, \quad S_j^+ = \exp \left[ -i\pi \sum_{l=1}^{j-1} f_l^\dagger f_l \right] f_j^\dagger, \quad S_j^- = f_j \exp \left[ i\pi \sum_{l=1}^{j-1} f_l^\dagger f_l \right] \quad (14)$$

と表す．この変換はジョルダン・ウィグナー変換と呼ばれる．(14) より，量子 XXZ スピン鎖のハミルトニアンは

$$H = J \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} (f_j^\dagger f_{j+1} + f_{j+1}^\dagger f_j) + \frac{J_z}{J} \left( f_j^\dagger f_j - \frac{1}{2} \right) \left( f_{j+1}^\dagger f_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (15)$$

と書ける．第一項はフェルミオンのホッピング，第二項は相互作用を表す．

簡単のため，まず相互作用のない場合を考える．格子間隔を  $a$  として離散フーリエ変換

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{iq_n a j} \tilde{f}_{q_n}, \quad q_n = \frac{2\pi}{aN} n \quad (16)$$

を施すと，(15) の第一項は対角化できて

$$H = J \sum_{n=1}^N \cos q_n \tilde{f}_{q_n}^\dagger \tilde{f}_{q_n} \quad (17)$$

となる．これより，分散関係  $E(q) = \cos q$  を得る．基底状態では，二つのフェルミ点  $q_F = \pm\pi/2a$  の間に波数  $q$  を持つ状態は全て占有されている．

低エネルギー領域での励起はフェルミ点近傍のフェルミオンのみに関与するので，フェルミ点付近で分散関係を線形近似できる．さらに連続極限を取ると，格子間隔に比べてゆっくり振動するフェルミオン  $\psi_{R,L}$  を用いて

$$\frac{f_j}{\sqrt{a}} = e^{iq_F a j} \psi_R(a j) + e^{-iq_F a j} \psi_L(a j) \quad (18)$$

と表せる．下添え字 R, L はそれぞれフェルミオンの右移動部分と左移動部分を表している． $\psi_{R,L}$  を用いて (15) を書き直すと，振動項  $e^{\pm iq_F a j}$  が  $j$  の足しあいで消えることに注意して

$$\begin{aligned} H &= \frac{aJ}{2} \sum_{j=1}^N \left[ \psi_L^\dagger(a j) \psi_L(a j + a) - \psi_L^\dagger(a j + a) \psi_L(a j) - \psi_R^\dagger(a j) \psi_R(a j + a) + \psi_R^\dagger(a j + a) \psi_R(a j) \right] \\ &= aJ \int_0^L dx \left( \psi_L^\dagger(x) \frac{d}{dx} \psi_L(x) - \psi_R^\dagger(x) \frac{d}{dx} \psi_R(x) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

を得る．右移動，及び左移動フェルミ粒子の密度を  $J_{R,L}(x) =: \psi_{R,L}^\dagger(x) \psi_{R,L}(x)$  で定義する．ここで，正規順序積  $:\ast:$  は  $\ast$  に含まれる消滅演算子が全て生成演算子の右側にくるよう並び替えた積である．フェルミオン密度  $J_{R,L}$  を用いると，(19) は高次の項を無視したとき

$$H = aJ \int_0^L dx (J_R J_R + J_L J_L) \quad (20)$$

となる．こうして，低エネルギー領域における量子 XXZ スピン鎖のハミルトニアンがフェルミ粒子密度で表せることがわかった．

ところで，一次元フェルミ粒子系における密度波はボゾン場  $\varphi_{R,L}$  と関連付けられる．この操作が (フェルミオンの) ボゾン化である．交換関係や相関関数の振る舞いからフェルミ粒子は

$$\begin{aligned} J_R &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_R}{dx}, & J_L &= \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi_L}{dx}, \\ \psi_R &= e^{i\varphi_R} / \sqrt{2\pi\epsilon}, & \psi_L &= e^{-i\varphi_L} / \sqrt{2\pi\epsilon} \end{aligned} \quad (21)$$

とボゾン化できることがわかる (ただし  $\epsilon$  はボゾン場をモード展開したときの積分が収束するよう導入した正の無限小量．以降の計算では  $\epsilon = a$  とする)．結局，(20) は

$$H = \frac{aJ}{2} \int_0^L dx \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \Pi^2 \right], \quad (22)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (\varphi_R(x) + \varphi_L(x)), \quad \Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{d}{dx} (\varphi_L(x) - \varphi_R(x))$$

と自由フェルミオン場の理論に帰着する．また，フェルミオン相互作用項にボゾン化を施すと

$$\begin{aligned} \Delta J \sum_{j=1}^N S_j^z S_{j+1}^z &= a\Delta J \int_0^L dx \left[ J_R J_R + J_L J_L + 4J_R J_L - (\psi_R^\dagger \psi_L)^2 - (\psi_L^\dagger \psi_R)^2 \right] \\ &= a\Delta J \int_0^L dx \left[ \frac{2}{\pi} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2 a^2} \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

となる．右辺第一式の第四，五項目はウムクラップ散乱 (散乱前後で運動量が保存しない散乱) するに対応する．この散乱により非線形項  $\cos(\sqrt{16\pi}\phi)$  が生じる．まとめると，量子 XXZ スピン鎖のハミルトニアンはボゾン場を用いて

$$\begin{aligned} H &= \frac{aJ}{2} \int_0^L dx \left[ \left( 1 + \frac{4\Delta}{\pi} \right) \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \Pi^2 + \frac{\Delta}{\pi^2 a^2} \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \\ &= \frac{v}{2} \int_0^L dx \left[ \left( \frac{1}{K} \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + K\Pi^2 + g \cos(\sqrt{16\pi}\phi) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

と書ける (ただし， $v = aJ(1 + 2\Delta/\pi)^{1/2}$ ， $K = (1 + 2\Delta/\pi)^{-1/2}$  とした)．ボゾン場を  $\phi \rightarrow K\phi/\sqrt{4\pi}$ ， $\Pi \rightarrow \sqrt{4\pi}\Pi/K$  と置き直すと，(24) はサイン・ゴールドン模型であることがわかる．共形不変な場の理論である自由ボゾン場の理論からの摂動は非線形項で与えられる．

ここで，スピン鎖長の偶奇が有効場理論の境界条件にどのように影響するか見てみる．(14) と (18) を用いると，スピン演算子は

$$S_j^z = \frac{K}{2\pi} \frac{d\phi}{dx} + (-1)^j \text{const.} \cos(K\phi), \quad S_j^- = e^{2\pi i \tilde{\phi}/K} (\text{const.} \cos(K\phi) + (-1)^j \text{const.}) \quad (25)$$

とスケールされたボゾン場で表せる．したがって，周期的境界条件  $S_0^z = S_N^z$ ， $S_0^- = S_N^-$  はボゾン場に対し

$$\phi(L) = \phi(0) + 2\pi M_z/K, \quad \tilde{\phi}(L) = \tilde{\phi}(0) + mK \quad (26)$$

と境界条件を課すことがわかる． $M_z$ ， $m$  は  $N$  の偶奇に応じてそれぞれ整数，あるいは半整数を取る．それに伴い，(26) で得られた条件は， $L = 2\pi/K$  を満たすシリンダー上のボゾン場に対し周期的境界条件，あるいは反周期的境界条件を課す．このようなボゾン場はコンパクト化されているといい， $R = K^{-1}$  をコンパクト化半径と呼ぶ．

## 4 量子サイン・ゴールドン模型の離散化と量子 XXZ スピン鎖

量子サイン・ゴールドン模型の性質は，スケール変数  $\ell$  に関する赤外極限 ( $\ell \rightarrow \infty$ ) と紫外極限 ( $\ell \rightarrow 0$ ) で詳しく調べることができる．赤外極限では，システムサイズが漸近状態を定義するのに

十分な大きさとなり、散乱行列を議論することが可能となる。一方、紫外極限では共形場理論の情報を取り出すことができる。量子サイン・ゴールドン模型の散乱行列は厳密に求めることができ、定数倍を除いて量子 XXZ スピン鎖の  $R$  行列と一致することが知られている<sup>9)</sup>。ここでは、量子サイン・ゴールドン模型の可積分性を保証する可換転送行列の存在を、光円錐の離散化により示す。

まずはじめに、共形場理論の観点から自由ボゾン場の性質を述べておく。共形変換は並進・回転・伸縮・特殊共形変換から成る変換で、これらは全て等角写像に属する。共形場理論は、臨界点にある二次元統計力学系の記述にしばしば用いられ、同じ共形場理論に帰着する複数個の異なる統計力学模型は同じユニバーサリティ・クラスに分類される。ユニバーサリティ・クラスへの分類はセントラル・チャージを用いて行われ、各系における相関関数の振る舞いは共形次元で特徴付けられる。セントラル・チャージは基底状態における場の自由度を、共形次元は共形変換における場の変換則を決定する量である。

自由ボゾン場の場合を考える。ボゾン場は、共役な複素数の組  $(z, \bar{z})$  を用いて

$$\begin{aligned}\phi(z) &= Q - i \left( \frac{M_z}{R} + mR \right) \ln z + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} z^{-n} \alpha_n, \\ \bar{\phi}(\bar{z}) &= Q - i \left( \frac{M_z}{R} - mR \right) \ln \bar{z} + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{z}^{-n} \bar{\alpha}_n\end{aligned}\quad (27)$$

とモード展開できる。 $\phi(z)$  はボゾン場の正則部分、 $\bar{\phi}(\bar{z})$  は反正則部分を表している。(24) は周期的境界条件を持つ  $1+1$  次元の理論なので、複素平面からシリンダー上へ  $z = e^{t+i\sigma}$ ,  $\bar{z} = e^{t-i\sigma}$  で与えられる共形変換  $(z, \bar{z}) \mapsto (t, \sigma)$  を行うと、各モード展開の第二項目に現れた  $M_z, m$  は (26) と同じ変数であることがボゾン場の境界条件からわかる。シリンダー上の共形場理論のエネルギー固有値は、

$$E(\ell) = \frac{2\pi}{\ell} (\Delta + \bar{\Delta}) - \frac{\pi c}{6\ell} \quad (28)$$

とスケール変数  $\ell$  の関数として書ける。ここで現れた  $c$ , 及び  $(\Delta, \bar{\Delta})$  がそれぞれセントラル・チャージ、共形次元であり、自由ボゾン場に対しては

$$c = 1, \quad \Delta = \frac{1}{2} \left( \frac{M_z}{R} + mR \right)^2, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{M_z}{R} - mR \right)^2 \quad (29)$$

と求まる。

量子サイン・ゴールドン模型における散乱過程は、量子 XXZ スピン鎖と等価であることが知られている。量子サイン・ゴールドン模型において粒子に相当するものはソリトン (反ソリトン) と呼ばれ、 $+1(-1)$  のチャージを持つ。ソリトン・チャージ  $\{++, +-, -+, --\}$  を基底にとると、散乱行列

$$\begin{aligned}S(\lambda) &= s(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\sinh[(1+\frac{1}{p})\lambda]}{\sinh[(1+\frac{1}{p})(i\gamma-\lambda)]} & \frac{\sinh[i\pi(1+\frac{1}{p})]}{\sinh[(1+\frac{1}{p})(i\gamma-\lambda)]} & \\ & \frac{\sinh[i\gamma(1+\frac{1}{p})]}{\sinh[(1+\frac{1}{p})(i\gamma-\lambda)]} & \frac{\sinh[(1+\frac{1}{p})\lambda]}{\sinh[(1+\frac{1}{p})(i\gamma-\lambda)]} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ s(\lambda) &= - \prod_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma[\frac{2}{p} - \frac{i}{\pi}(1+\frac{1}{p})\lambda] \Gamma[\frac{2}{p}l + 1 - \frac{i}{\pi}(1+\frac{1}{p})\lambda]}{\Gamma[\frac{1}{p}(2l-1) - \frac{i}{\pi}(1+\frac{1}{p})\lambda] \Gamma[\frac{1}{p}(2l-1) + 1 - \frac{i}{\pi}(1+\frac{1}{p})\lambda]} / (\lambda \rightarrow -\lambda)\end{aligned}\quad (30)$$

は、定数倍を除いて量子 XXZ スピン鎖に対する  $R$  行列と一致する (ただし  $p = \pi/\gamma - 1$ ) . 非ゼロ成分の配置は、ここではソリトン・チャージの保存則に対応している .

量子サイン・ゴールドン模型は相対論的な場の理論なので、ソリトンの運動はローレンツ不変であり、ミンコフスキー空間上で  $(ct)^2 - x^2 = 0$  を満たす線上を運動する .  $ct = x$  は右移動ソリトンの運動を、 $ct = -x$  は左移動ソリトンの運動をそれぞれ表す . これらの線のことを光円錐と呼ぶ (いまの場合、1+1 次元なので円錐ではなく線となる) . 場の理論上で  $x$  は連続量であるが、格子間隔を  $a$  とし、 $x = ja$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) と離散化することを考える . こうして得られる光円錐は、格子間隔  $a/\sqrt{2}$  で離散化された二次元格子となる (図 5) . ソリトンの散乱は光円錐の頂点のみで起こり、そ

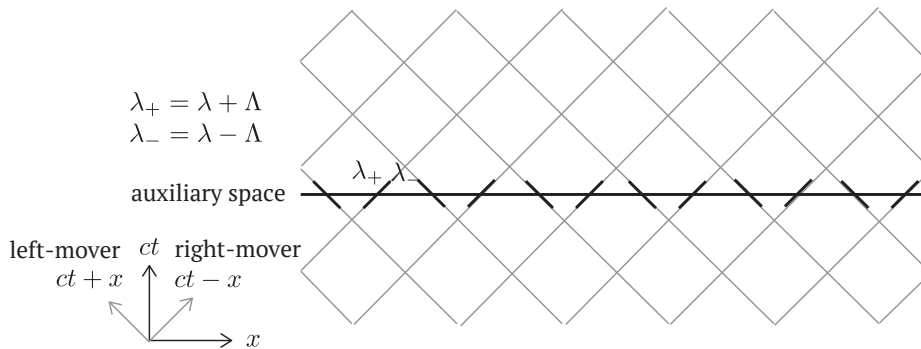


図 5: 離散化された光円錐 . 右移動ソリトンと左移動ソリトンを区別して取り扱うため、非斉次変数  $\pm\Lambda$  を導入する . 太線で示した部分が量子サイン・ゴールドン模型における転送行列に対応する .

の散乱振幅は頂点周りの四本のエッジ上に存在するソリトンのチャージによって (30) で決まる . したがって、離散化された光円錐上における状態の時間発展は、量子 XXZ スピン鎖と同様に転送行列で記述できる . ただし、右移動ソリトンと左移動ソリトンを取り扱うため非斉次変数  $\pm\Lambda$  を導入し、

$$T(\lambda) = \text{tr}_0[R_{0,2N}(\lambda - \Lambda)R_{0,2N-1}(\lambda + \Lambda) \cdots R_{02}(\lambda - \Lambda)R_{01}(\lambda + \Lambda)] \quad (31)$$

で転送行列を定義する . これにより、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{4ia} \left[ \frac{d}{d\lambda} \ln T(\lambda) \Big|_{\lambda=\Lambda} + \frac{d}{d\lambda} \ln T(\lambda) \Big|_{\lambda=-\Lambda} \right] \quad (32)$$

と変更される . ここで導入された非斉次変数  $\Lambda$  は、関係式  $M = a^{-1}e^{-\pi\Lambda/\gamma}$  でソリトン質量を与える変数である .

転送行列 (31) は、量子 XXZ スピン鎖と同様にベータ仮設法で対角化できる . その固有値は、ベータ方程式の解  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を用いて

$$t(\lambda) = l_1(\lambda) + l_2(\lambda) = \phi \left( \lambda + \frac{i\gamma}{2} \right) \frac{Q(\lambda - i\gamma)}{Q(\lambda)} + \phi \left( \lambda - \frac{i\gamma}{2} \right) \frac{Q(\lambda + i\gamma)}{Q(\lambda)}, \quad (33)$$

$$\phi(\lambda) = \sinh^N(\lambda - \Lambda) \sinh^N(\lambda + \Lambda), \quad Q(\lambda) = \prod_{j=1}^n \sinh(\lambda - \lambda_j)$$

と書ける . 前にも述べたようにベータ方程式を解くことは一般に困難であるが、関数  $t(\lambda)$  の解析性を用いることで、ベータ根を求めずに散乱振幅やエネルギーを計算することが可能である . 量子サイン・ゴールドン模型の基底状態を与える解は実軸付近に分布する .  $t(\lambda)$  のゼロ点 ( $\lambda = h_j$ ) が 1



ストリングに対するベータ量子数の未占有部分，すなわちホールに対応していることに着目すると，コーシーの定理より

$$\oint_C d\lambda e^{ik\lambda} \frac{d^2}{d\lambda^2} [\ln T(\lambda)] = \frac{2\pi k}{1 - e^{-\pi k}} \sum_{h_j \in \mathbb{R}} e^{ikh_j} \quad (34)$$

が成り立つ．量子サイン・ゴルドン模型では，ホールはソリトンに対応する．

ここで，関数  $\mathfrak{A}(\lambda)$ ,  $\bar{\mathfrak{A}}(\lambda)$ ,  $\mathfrak{a}(\lambda)$ ,  $\bar{\mathfrak{a}}(\lambda)$  を

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(\lambda) &= \frac{l_2(\lambda)}{l_1(\lambda)}, & \bar{\mathfrak{a}}(\lambda) &= \frac{l_1(\lambda)}{l_2(\lambda)}, \\ \mathfrak{A}(\lambda) &= \frac{t(\lambda)}{l_1(\lambda)} = 1 + \mathfrak{a}(\lambda), & \bar{\mathfrak{A}}(\lambda) &= \frac{t(\lambda)}{l_2(\lambda)} = 1 + \bar{\mathfrak{a}}(\lambda) \end{aligned} \quad (35)$$

で定義する．(34) を用いて  $Q$  依存性を取り除くと，非線形積分方程式

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{a}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' G(\lambda - \lambda' - i\epsilon) \ln \mathfrak{A}(\lambda' + i\epsilon) - \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' G(\lambda - \lambda' + i\epsilon) \ln \bar{\mathfrak{A}}(\lambda' - i\epsilon) \\ &\quad + 2iN \tan^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi\lambda}{\gamma}}{\cosh \frac{\pi\Lambda}{\gamma}} + 2\pi \sum_j \chi(\lambda - h_j) + \text{const.}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\chi(\lambda) = 2\pi \int_0^\lambda d\lambda' G(\lambda'), \quad G(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\lambda\omega} \frac{\sinh[\frac{\gamma}{2}(p-1)\omega]}{2 \sinh[\frac{\gamma}{2}p\omega] \cosh[\frac{\gamma}{2}\omega]}$$

を得る．この非線形積分方程式は，散乱行列やエネルギーの計算で中心的な役割を果たす．固有エネルギーの表式 (32), (33) から (34) を用いて  $Q$  依存性を消し去ると

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{bulk}} + E_{\text{ex}} + E_C, \\ E_{\text{bulk}} &= \frac{L}{4} M^2 \cot \frac{\pi^2}{2\gamma}, & E_{\text{ex}} &= M \sum_j \cosh \left( \frac{\pi}{\gamma} h_j \right), \\ E_C &= \frac{M}{2\gamma} \Im \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \sinh \left( \frac{\pi}{\gamma} \lambda - i\epsilon \right) \ln \mathfrak{A} \left( \frac{\pi}{\gamma} \lambda - i\epsilon \right) \end{aligned} \quad (37)$$

となり<sup>10)</sup>，カシミア・エネルギー  $E_C$  が  $\mathfrak{A}$  の関数として書けることがわかる（ただし  $\epsilon$  は正の無限小量）．また，励起エネルギー  $E_{\text{ex}}$  から，ソリトンの運動がたしかに相対論的であることがわかる．

散乱行列は赤外極限 ( $\ell \rightarrow \infty$ ) で計算できる．スケール変数  $\ell$  は，ソリトン質量を用いて  $\ell = ML$  と取れる．赤外極限での非線形方程式は，(36) の第三項を

$$2iN \tan^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi\lambda}{\gamma}}{\cosh \frac{\pi\Lambda}{\gamma}} \rightarrow 2iLM \sinh \frac{\pi\lambda}{\gamma} \quad (38)$$

と置き換えたもので与えられる．これにホールのラピディティ ( $\lambda = h_j$ ) を代入してみると，

$$e^{2iLM \sinh \frac{\pi h_j}{\gamma}} \prod_{l; l \neq j} e^{2\pi\chi(h_j - h_l)} = 1 \quad (39)$$

となる．これは，スケールされたラピディティ ( $\theta_j = \pi h_j / \gamma$ ) を持つソリトンの散乱による位相変化を表しており， $\chi$  が散乱振幅に対応することがわかる．

一方，紫外極限 ( $\ell \rightarrow 0$ ) を取る際にはベータ根の振る舞いに注意が必要である．紫外極限近傍では，スケール変数  $\ell$  の変化に伴いベータ根は  $\theta \sim \text{sgn}(\Re\theta) \ln 2/\ell$  と発散する．

$\hat{\theta} = \theta - \text{sgn}(\Re\theta) \ln 2/\ell$  とスケーリングすることで有限部分  $\hat{\theta}$  を取り出し、それを用いて書き直した非線形積分方程式から、固有エネルギー

$$E(\ell) = E_{\text{ex}}(\ell) + E_{\text{C}}(\ell) \\ = \frac{2\pi}{\ell} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{(2M_z)_{\text{mod } 2}}{2R} + M_z R \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{(2M_z)_{\text{mod } 2}}{2R} - M_z R \right)^2 \right] - \frac{\pi}{6\ell} \quad (40)$$

を得る(ただし、コンパクト化半径を  $R = \sqrt{(p+1)/2p}$  とした)。こうして、たしかに(29)の自由ボゾン場のセントラルチャージ、及び共形次元が得られた。ただし、ここでは  $M_z$  が整数のみ取することに注意する。これは、転送行列(31)を構成する際に右移動ソリトンと左移動ソリトンを表す非斉次項を同時に入れるため、偶数サイトから成るスピン鎖を考えたからである。スピン鎖長の偶奇により  $M_z$  が整数、あるいは半整数を取るとは、ボゾン化法を用いてすでに導いた条件と合致する。 $M_z$  が取る値に関する条件は、ソリトンの個数の偶奇と対応している。非線形積分方程式で  $\hat{\theta} \rightarrow \infty$  の極限を取ると、ソリトンの個数  $N_{\text{H}}$  に関する関係式  $N_{\text{H}} = 2M_z$  が得られる。(26)の結果より、奇数サイトから成るスピン鎖上で転送行列を構成すれば、量子サイン・ゴルドン模型において奇数個のソリトンが存在する状態を記述できると予想できる。しかしながら、スピン鎖の非斉次性のため、奇数サイトから成るスピン鎖に対する転送行列の構成は未解決な問題である<sup>11, 12)</sup>。

## 5 おわりに

量子スピン鎖と量子場の理論の間に対応関係があると、離散系での方法を用いて連続系を調べることができる。このとき、両者を対応づける指針の一つが散乱行列であり、それが厳密に求まることを保証するのが系の可積分性である。離散化や連続極限を通して初めて現れる対称性の存在など、量子系における連続・離散対応には面白い物理が数多く現れる<sup>13, 14)</sup>。しかしながら、この対応関係には未解明な部分も多い。今後の発展が期待されるこの問題を通して、可積分という側面から見た物理の面白さを感じていただければ幸いである。最後に、この原稿の作成にあたり多大なアドバイスをくださった宮下精二先生に感謝する。

## 参考文献

- 1) H. Bethe: Zeitschrift für Physik, **71** (1931) 205.
- 2) R.J. Baxter: Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (2008) Dover Publications.
- 3) L.D. Faddeev: Les Houches lecture notes 1995 hep-th/9605187.
- 4) L.A. Takhtajan: Phys. Lett., **87A** (1982) 479.
- 5) M. Takahashi: Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models (1999) Cambridge University Press.
- 6) V.E. Korepin et. al: Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions (1997) Cambridge University Press.
- 7) 1 ストリングより長いストリング解が存在する場合は、発散項が現れるので取り扱いに注意する。
- 8) 川上 則雄, 梁 成吉: 共形場理論と1次元量子系 (1997) 岩波書店。
- 9) A.I.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov: Ann. Phys., **120** (1979) 253.
- 10) 簡単のため、ここではホール励起のみを考え、関数  $\ln \alpha(\lambda)$  が単調増加すると仮定する。
- 11) C. Ahn et. al: Nucl. Phys. B, **799** (2008) 379.
- 12) C. Matsui: Nucl. Phys. B, **885** (2014) 373.
- 13) X. Yang and P. Fendley: J. Phys. A: Math. Gen., **37** (2004) 8937.
- 14) C. Matsui: Nucl. Phys. B, **913** (2016) 15.