

量子多体系における量子もつれとエネルギーの関係性

東北大学大学院理学研究科

堀田昌寛

多くの量子多体系の基底状態には、部分系間の相互作用を通じて自然に量子もつれが存在している。そして基底状態上の励起は、その量子もつれ構造に影響を受ける。その結果基底状態における量子エネルギーテレポーションにおいても、その転送エネルギーと量子もつれの間には密接な関係があることが知られている。また基底状態の量子もつれ構造は、低温にある熱平衡系から局所的操作だけで抽出されるエネルギー量の上限にも制限を与える。例えばある緩い条件を満たす多くの基底状態での量子もつれ構造に対しては、閾値温度が存在し、それ以下の温度では決して熱エネルギーは局所的に取り出せないという局所強受動性が見れる。これらの新奇な現象の発見は、量子情報と量子物理の融合が今後も新しい視点を物性研究に与え続けると期待させるものである。

1 はじめに

量子もつれは、量子計算などの多様な量子情報処理のリソースとして広く認知されるようになった。しかし量子もつれを生成制御することについては、現在でも技術的には難しい側面も残っている。一方、相互作用をしている量子多体系の基底状態では、多くの場合に様々な量子もつれが自発的に発生する。従って系を低温に冷やすだけで、量子もつれを生み出すことが原理的に可能である。このため低温量子多体系の量子もつれは、応用物理の面からも興味深い研究対象である。基礎物理の面でも基底状態の量子もつれはトポロジカル秩序 [1] 等に応用され、量子多体系自体の理解を深めるのに有効なツールになっている。この講義録では、特に量子もつれと系のエネルギー的性質の関係性に焦点を当てることにする。第2章では、ここで使う量子情報理論のいくつかの概念の導入を行う。第3章では、量子エネルギーテレポーション (Quantum Energy Teleportation, QET) を紹介する。全エネルギーが最低値に固定されている基底状態でも、各部分系のエネルギー密度自体は量子的に揺らいでおり、局所的な零点エネルギーを持っている。しかし局所的な操作で1つの部分系からその零点エネルギーを取り出すことはできない。これが可能であれば、操作後状態は基底状態より低いエネルギーを持つことになり、矛盾が生じるためである。しかし別な部分系の量子揺らぎを局所的に測定して得られる情報を用いると、面白いことにこの取り出せなかった零点エネルギーは抽出できるようになる。この量子測定には量子もつれ破壊に必要なエネルギー注入があるため、必ず系の全エネルギーは増加する。この注入エネルギーを担保にして、測定後もまだ零エネルギー領域のままである部分系から零点エネルギーを取り出せるのだ。このエネルギーはQETでの転送エネルギーと呼ばれる。この大きさは基底状態での量子もつれ量と密接な

関係があり、第4章で紹介される。基底状態の量子もつれ構造は、低温熱平衡にある量子多体系において、1つの部分系から抽出するエネルギー量に強い影響を与える。通常のエネルギー輸送時間よりずっと短い時間で行う局所的操作によって、系から熱エネルギーを外部に取り出すことを考える。このとき操作される部分系とそれ以外の部分系間の基底状態の量子もつれが、そのシュミット分解において最大ランク構造を持てば、ある閾値温度が存在し、それ以下の温度では決して熱エネルギーは局所的に取り出せないという局所強受動性 (strong local passivity) という性質が示される。これも第4章で紹介する。なお量子エネルギーテレポーテーションのより詳しい解説は [2][3] で見られる。

2 量子情報の簡単な準備

ページ数の制限もあり、ここでは後で必要になる量子情報理論の最小限の知識を紹介する。詳しい内容は [4][5] 等の教科書を参照にして欲しい。以降では量子状態を表すのに密度行列 $\hat{\rho}$ も用いることにし、また特に断らない限り量子系のヒルベルト空間の次元は有限とする。最初に一般測定 (general measurement) を解説しよう。測定をしたい量子系 A とする。これを測る測定機 D もマクロな量子系として扱う。初期時刻 $t = 0$ に A は測定者がその情報を知りたい未知の量子状態 $\hat{\rho}_A$ にある。 D の状態は既知とし、簡単のため純粋状態 $|0\rangle_D$ としよう。このとき合成系 AD の状態はテンソル積状態 $\hat{\rho}_A \otimes |0\rangle_D \langle 0|_D$ で与えられる。 $t = 0$ から $t = t_m$ まで A と D は測定のユニタリーな相互作用 \hat{U}_{AD} をし、その後それは切れる。この相互作用を通じて $\hat{\rho}_A$ に含まれていた情報の一部は、測定信号として D の状態に刻まれる。その情報は D 内部での信号増幅過程を経てマクロな信号になり、 D のメーターに表示される。そのメーターの出力値 μ を測定者が読むことは、量子系 D のマクロな物理量の理想測定 (射影測定) に対応する。この D の出力値は $\hat{\rho}_A$ の情報を含むことから、この D の理想測定は A の間接測定になっている。そのためこれは A の一般測定と呼ばれる。以降では簡単のために μ に関する縮退はないとし、この理想測定の自己共役射影演算子を $\hat{P}_D(\mu) = |\mu\rangle_D \langle \mu|_D$ と書こう。これは $\sum_{\mu} \hat{P}_D(\mu) = \hat{I}_D$ という完全性を満たす。ある μ の値を得る確率は $p(\mu) = \text{Tr}_{AD} \left[\hat{P}_D(\mu) \left(\hat{U}_{AD} (\hat{\rho}_A \otimes |0\rangle_D \langle 0|_D) \hat{U}_{AD}^\dagger \right) \right]$ であり、 μ を得た後の A の状態は

$$\hat{\rho}_A(\mu) = \frac{1}{p(\mu)} \text{Tr}_D \left[\hat{P}_D(\mu) \hat{U}_{AD} (\hat{\rho}_A \otimes |0\rangle_D \langle 0|_D) \hat{U}_{AD}^\dagger \right]$$

と計算できる。一般測定は、測定演算子 $\hat{M}_A(\mu)$ というもので特徴付けが可能である。その定義は

$$\hat{M}_A(\mu) = \langle \mu|_D \hat{U}_{AD} |0\rangle_D \quad (1)$$

で与えられる。右辺において D の行列部分の足は D のブラとケットの足とともに和がとられるため、 A の行列の足だけが残っている。つまり $\hat{M}_A(\mu)$ は A 系のヒルベルト空間に作用する演算子である。また \hat{U}_{AD} のユニタリー性から

$$\sum_{\mu} \hat{M}_A^{\dagger}(\mu) \hat{M}_A(\mu) = \hat{I}_A \quad (2)$$

を満たす。 $\hat{M}_A(\mu)$ を使うと μ の出現確率は $p(\mu) = \text{Tr}_A [\hat{M}_A^{\dagger}(\mu) \hat{M}_A(\mu) \hat{\rho}_A]$ と計算され、その A の測定後状態は $\hat{\rho}_A(\mu) = \hat{M}_A(\mu) \hat{\rho}_A \hat{M}_A^{\dagger}(\mu) / p(\mu)$ と書ける。そして出現確率で平均した測定後状態は

$$\hat{\rho}'_A = \sum_{\mu} \hat{M}_A(\mu) \hat{\rho}_A \hat{M}_A^{\dagger}(\mu) \quad (3)$$

と書くことができる。一般測定が A の理想測定に一致する場合には、 $\hat{M}_A(\mu)$ は自己共役な射影演算子となる。しかし普通 $\hat{M}_A(\mu)$ は自己共役でも、射影演算子でもないことに注意が必要である。また数学的には (2) 式の関係を満たす任意の演算子集合 $\{\hat{M}_A(\mu)\}$ に対して、いつでも (1) 式を満たす $\hat{U}_{AD}, | \mu \rangle_D, | 0 \rangle_D$ を構成することができる [6]。つまり (2) 式を満たす勝手な $\{\hat{M}_A(\mu)\}$ を与えれば、それを測定演算子とする量子測定の原理的実装可能性は保証され、またその測定の数学的性質は $\hat{M}_A(\mu)$ で全て決定されている。実は可能な任意の物理的操作を記述する T P C P 写像 (Trace-Preserving Completely Positive Map, トレース保存完全正值写像) でも、この一般測定とよく似た取扱いができる。 $\hat{\rho}_A$ の状態にある A に物理的な操作をすると、その状態は (3) 式のように

$$\Gamma_A [\hat{\rho}_A] = \sum_k \hat{K}_A(k) \hat{\rho}_A \hat{K}_A^{\dagger}(k) \quad (4)$$

と写像される。ここで $\hat{K}_A(k)$ はクラウス演算子と呼ばれ、(2) 式と同様に

$$\sum_k \hat{K}_A^{\dagger}(k) \hat{K}_A(k) = \hat{I}_A \quad (5)$$

を満たす。量子情報の一般論では、測定に関しては一般測定を、物理的操作に関しては TPCP 写像を扱う。

次に純粋状態の量子もつれ指標であるエンタングルメントエントロピー (Entanglement Entropy, EE) を導入する。2つの量子系 A, B における純粋状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ を考えよう。ヒルベルト空間の次元はそれぞれ N_A, N_B とする。ここで一般性を失うことなく $N_A \leq N_B$ を仮定できる。 $|\Psi\rangle_{AB}$ をシュミット分解して

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{n=1}^{N_A} \sqrt{p_n} |u_n\rangle_A |v_n\rangle_B$$

と書こう。 p_n は確率分布であり、 $\{|u_n\rangle_A\}$ は A の直交基底、 $\{|v_n\rangle_B\}$ は B の N_A 本の直交単位ベクトルの集合である。このとき A と B の間の EE は

$$S_{EE}(|\Psi\rangle_{AB}) = - \sum_{n=1}^{N_A} p_n \ln p_n$$

で定義される。これは A や B の縮約状態

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}], \quad \hat{\rho}_B = \text{Tr}_A[|\Psi\rangle_{AB}\langle\Psi|_{AB}]$$

に対してのフォンノイマンエントロピーに一致していることもわかる。

$$S_{EE}(|\Psi\rangle_{AB}) = - \text{Tr}_A[\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A] = - \text{Tr}_B[\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B].$$

純粋状態にある AB 系に対して局所的な一般測定をしたり、得られた測定結果を A と B の間で通信し、更にその結果に依存した局所的な A と B への物理的操作等を繰り返した後でも、合成系が純粋状態になっていることがある。そのような場合 EE は増加せず、保存するかまたは減少するかのどちらかであることが示せる [7]。この性質は局所操作と古典通信 (Local Operation and Classical Communication, LOCC) のもとでの量子もつれの単調性と呼ばれる。一般に量子もつれを増加させるためには、直接 A と B を相互作用させるか、 A と B の間を繋ぐ光ファイバーに光子を飛ばすような量子通信路を使って間接的に A と B を相互作用させるしかない。この単調性は QET の文脈でも重要になる。

3 量子エネルギーテレポーテーション

次に QET [8][9] を解説する。これは量子多体系基底状態の量子もつれを利用し、LOCC のもとで操作論的な意味のエネルギー転送を実現する量子プロトコルである。任意の次元の様々な量子多体系で原理的には QET は実装可能だが、ここでは簡単のため 2 準位スピン (量子ビット系) の 1 次元鎖を用いて説明を行う。近接相互作用を仮定すると、ハミルトニアン \hat{H} はいってもエネルギー密度演算子 \hat{T}_n のサイト和で書ける。

$$\hat{H} = \sum_n \hat{T}_n.$$

例えば横磁場イジングスピン鎖モデルでは、ハミルトニアンは n 番目のサイトのパウリ演算子 $\hat{\sigma}_n^i$ と b, g, ε という実定数を使って

$$\hat{H} = b \sum_n (\hat{\sigma}_n^z - \varepsilon) - g \sum_n \hat{\sigma}_n^x \hat{\sigma}_{n+1}^x - E_o$$

と書けるが、その \hat{T}_n は

$$\hat{T}_n = b(\hat{\sigma}_n^z - \varepsilon) - \frac{g}{2}\hat{\sigma}_{n-1}^x\hat{\sigma}_n^x - \frac{g}{2}\hat{\sigma}_n^x\hat{\sigma}_{n+1}^x$$

となる。以降では基底状態 $|g\rangle$ には縮退がない場合を考える。ここでエネルギー密度に定数を加えて調整すると常に $\langle g|\hat{T}_n|g\rangle = 0, \hat{H}|g\rangle = 0$ が成り立つようにできるので、以下ではこれを仮定しよう。多くのモデルでは \hat{T}_n と \hat{H} は可換ではないため、基底状態での全エネルギーは零固有値に固定されても、 \hat{T}_n は量子的に零平均値の周りを揺らいでいる。この揺らぎの存在と平均値が零であることから、このようなモデルでは \hat{T}_n は負固有値を持っていることがわかる。つまり全エネルギー固有値が非負でも、その固有状態の線形重ね合わせ状態 $|\Psi\rangle$ を考えれば、あるサイト周辺では負のエネルギー密度期待値 ($\langle \Psi|\hat{T}_n|\Psi\rangle < 0$) を現わすことが可能だ。QETはこの性質を利用している。

QETの初期設定では系は基底状態 $|g\rangle$ にある。ここでアリスがいる n_A というサイトにあるスピンの一方向成分 $\hat{\sigma}_A$ を理想測定して、零点振動の情報を得るとしよう。量子もつれのおかげでこの測定結果には他のスピンの揺らぎの情報も含まれている。このアップ (+) かダウン (-) かの2値の測定結果 $\mu = \pm$ を出力する局所測定演算子は射影演算子 $\hat{P}_A(\mu) = \left(\hat{I}_A + \mu\hat{\sigma}_A\right)/2$ となり、系全体の測定後状態は

$$\hat{\rho}_M = \sum_{\mu} \hat{P}_A(\mu) |g\rangle\langle g| \hat{P}_A(\mu)$$

となる。そしてこの状態でのエネルギー期待値は

$$E_A = \text{Tr} \left[\hat{H} \hat{\rho}_M \right] = \sum_{\mu} \langle g|\hat{P}_A(\mu) \hat{H} \hat{P}_A(\mu) |g\rangle > 0$$

という正の値をとる。これは測定中に測定機から系にエネルギー E_A が注入されたことを意味する。測定直後 E_A はアリス周辺のサイトにだけ局在している。次に n_B という離れたサイトにいるボブにこの結果を伝える。この系は非相対論的なため、通信速度を光速近くにするれば、ボブが情報を受けとった直後に、ボブ周辺のスピンはまだエネルギー零の局所的基底状態のままである。取り出せるエネルギーは一見存在しないように思えるが、アリスからの情報を得たボブにとってはスピン鎖系に観測による状態の収縮が起き、測定結果に依存したユニタリー操作でボブは自分のスピンからエネルギーを外部に取り出すことが可能となる。 $\hat{\sigma}_B$ をサイト n_B のパウリ演算子のある方向成分としよう。これと角度パラメータ θ の適当な値で定義される、測定結果 μ に依存した

$$\hat{U}_B(\mu) = \exp(-i\mu\theta\hat{\sigma}_B)$$

という操作を、ボブは自分のスピンに行う。その平均測定後状態は

$$\hat{\rho}_{QET} = \sum_{\mu} \hat{U}_B(\mu) \hat{P}_A(\mu) |g\rangle\langle g| \hat{P}_A(\mu) \hat{U}_B(\mu)^\dagger$$

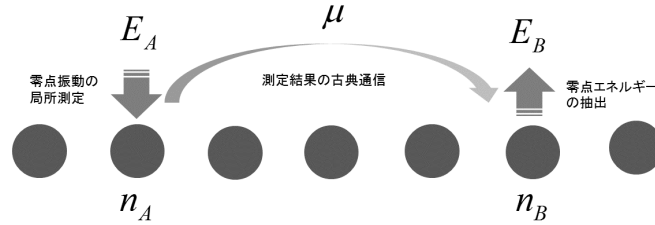


図1: 量子エネルギーテレポーテーションの概念図

になる。この操作中に、それを実行する装置とスピン鎖との間でエネルギー交換が起きている。ここで以降では

$$\xi = \langle g | \hat{\sigma}_B \hat{H} \hat{\sigma}_B | g \rangle, \eta = i \langle g | \hat{\sigma}_A [\hat{H}_B, \hat{\sigma}_B] | g \rangle$$

という実数量を用いて θ を

$$\tan(2\theta) = \frac{\eta}{\xi}$$

と固定しよう。するとスピン鎖系から操作装置系に

$$E_B = E_A - \text{Tr} [\hat{H} \hat{\rho}_{QET}] = \frac{1}{2} (\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \xi) > 0$$

という正のエネルギーが移動することが確認できる。このスピンはエネルギー零の局所基底状態だったはずだったことから、正の零点エネルギーをスピン鎖から取り出せたことを意味する。そしてエネルギー保存則から、ボブ周辺のスピン鎖系では \hat{T}_n が負の期待値をとる。 E_A は QET の入力エネルギーと呼ばれ、 E_B は出力エネルギーまたは転送エネルギーと呼ばれる。図1には概念図を与えた。なおプロトコル終了後も系全体のエネルギーは正であるため、常に $E_B \leq E_A$ が成り立つ。またアリスの測定後に局所基底状態にある他のスピンからも測定結果を使って零点エネルギーを取り出すこともできる。この場合でも取り出せる零点エネルギーの総量は E_A を超えない。なお E_B 抽出後、アリスのスピン周辺に溜まる E_A を局所操作だけで取り出そうとしても、必ず一定量のエネルギーが残留する。これは E_A の一部が QET 実行のためのエネルギー的な担保だった帰結であるが、同時に量子測定による量子もつれ破壊と、量子もつれの単調性からの量子情報理論的な一般的帰結でもある [8][9]。

QET は先のスピン鎖以外にも様々な物性系で考えることができる。なかでも量子ホール系の端電流は技術的にも検証可能なレベルの転送エネルギーを与える系である [10][11]。その電子液滴境界には磁場で決まる定まった向き

の端電流が流れている。この境界を励起すると、電子密度が境界線上で変化する。その変位は質量零のカイラルなスカラー有効場 $\hat{\phi}$ で記述されることが知られている [12]。境界に沿った空間座標を x とし、変位の伝搬速度を 1 にする時間座標 t を用いて、励起の一方向に定まった進行方向の座標 $x^+ = t + x$ を導入する。また対応するカイラル共役運動量の場を $\hat{\Pi}_+(x^+) = \partial_+ \hat{\phi}(x^+)$ で定義しよう。ここでアリスがいる領域に局在する実数関数 $\lambda_A(x)$ を用いて、 $\hat{\phi}$ の零点振動のある一般測定を考える。この測定は $b = 0, 1$ の電位揺らぎの 1 ビットの情報を出力し、その測定演算子は

$$\hat{M}_{0A} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_A(x) \hat{\Pi}_+(x) dx \right),$$

$$\hat{M}_{1A} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_A(x) \hat{\Pi}_+(x) dx \right)$$

で与えられる。このとき測定で励起される端電流の波束のエネルギーフラックスの期待値は b に依存せず

$$\langle \psi_b | \hat{T}_{++}(x^+) | \psi_b \rangle = \frac{1}{4} (\partial_+ \lambda_A(x^+))^2$$

と計算され、QETの入力エネルギーはその空間積分で与えられる。

$$E_A = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_+ \lambda_A(x^+))^2 dx^+.$$

測定結果 b を、アリスはエネルギーを持たない端電流の上流部分の局所真空状態領域にいるボブに時間 T をかけて知らせる。ボブはその結果に応じて

$$\hat{U}_{bB} = \exp \left[i(-1)^b \theta \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_B(x) \hat{\Pi}_+(x) dx \right]$$

というユニタリー操作を自分の領域の $\hat{\phi}$ の零点振動に行う。ここで $\lambda_B(x)$ はボブ周辺に局在する実数関数であり、転送エネルギーを最大にするように角度パラメータ θ を決定すると、ボブは

$$E_B = \frac{|\langle -\lambda_A | \lambda_A \rangle|^2}{\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \lambda_B(x))^2 dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_A(x_A) \lambda_B(x_B)}{(x_B - x_A + T)^3} dx_A dx_B \right)^2 > 0$$

という正の平均エネルギーを零点振動から取り出すことが分かる。ここで $|\lambda_A\rangle$ は $\hat{\Pi}_+(x)$ に対応するコヒーレント状態である。もう少し具体的に解析をすると、現実の量子ホール系では $O(10) \mu\text{m}$ の距離に対して $O(100) \mu\text{eV}$ の E_B が転送可能であることが期待できる [10]。なお端電流の基底状態 (真空状態) を持ちいる QET での転送エネルギー E_B には、転送距離 L で定まる

$$E_B \leq \frac{1}{12\pi L}$$

という原理的な上限が存在する。しかしアリスとボブの領域の間の零点振動をスキージングすると、この上限は破ることが可能となることも知られている [11]。

4 基底状態の量子もつれが導くエネルギー的な性質

基底状態に量子もつれが存在しなければ、QETの転送エネルギー E_B は零となる。逆にあるQETプロトコルで正の E_B を得たとき、それはエネルギー入力領域と出力領域の間の量子相関の存在を意味する。この関係は対象系とそのハミルトニアンを指定することで定量化できる。例えば2量子ビット系の横磁場イジングモデルでのミニマルQET [13] では、解析的にこの関係を求めることが可能である。ハミルトニアンは正の定数 h, k を用いて

$$\hat{H} = h\hat{\sigma}_A^z + h\hat{\sigma}_B^z + 2k\hat{\sigma}_A^x\hat{\sigma}_B^x + 2\sqrt{h^2 + k^2}$$

で与えられる。一方の量子ビット A の $\hat{\sigma}_A^x$ を理想測定したときの入力エネルギーは

$$E_A = \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

と計算され、他方の量子ビット B から取り出される転送エネルギーは

$$E_B = \frac{h^2 + 2k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left[\sqrt{1 + \frac{h^2 k^2}{(h^2 + 2k^2)^2}} - 1 \right]$$

と計算される。基底状態における A と B の間のエンタングルメントエントロピーを S_{EE} としよう。また B の局所エネルギーを変化させない一般測定において確率 p_μ で出力値 μ を観測したとき、この測定後状態でのエンタングルメントエントロピーを $S_{EE}(\mu)$ とする。この場合、測定で壊された量子もつれ量は

$$\Delta S_{EE} = S_{EE} - \sum_{\mu} p_{\mu} S_{EE}(\mu)$$

と定義できる。ここでQETによって正の E_B を得たとしよう。この場合、 $\varsigma = \tan^{-1}(k/h)$ を用いて

$$\Delta S_{EE} \geq \frac{1 + \sin^2 \varsigma}{2 \cos^3 \varsigma} \ln \frac{1 + \cos \varsigma}{1 - \cos \varsigma} \frac{E_B}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (6)$$

という不等式を証明することができる [13]。この関係は、 E_B を得るQETプロトコルでは必ず右辺の量以上の量子もつれ破壊が伴うことを示している。ミニマルQETモデルでは、以下の別な不等式も導くことができる [13]。

$$\max_{U_B(\mu)} E_B \geq \frac{2\sqrt{h^2 + k^2} [\sqrt{4 - 3 \cos^2 \varsigma} - 2 + \cos^2 \varsigma]}{(1 + \cos \varsigma) \ln \left(\frac{2}{1 + \cos \varsigma} \right) + (1 - \cos \varsigma) \ln \left(\frac{2}{1 - \cos \varsigma} \right)} \Delta S_{EE}$$

ここで左辺は A の測定を固定して B のユニタリー操作を変化させた場合の転送エネルギーの最大値である。 ΔS_{EE} だけ基底状態の量子もつれを測定で破壊したとき、QETの転送エネルギーは右辺よりも必ず大きくできる。調

和振動子鎖系でのQETモデルでも(6)式と同様な量子もつれと転送エネルギーの不等式を得ることができる[14]。これらの不等式は対象系に依存した形で与えられているが、有限自由度の量子多体系では、対象系の詳細に依存しない普遍的な転送エネルギーと量子もつれの不等式を得ることも可能である[15]。基底状態において、ある部分系 A を一般測定をし、零点振動の情報を得るとしよう。それを用いて、 A の補部分系 \bar{A} に含まれる部分系 B からエネルギー E_B を取り出すQETを考える。このとき \hat{H}_B を \hat{T}_n のうち B の演算子を含む全てのものの和で与えると、基底状態における A と \bar{A} の間のエンタングルメントエントロピー S_{EE} には次の下限が存在する[15]。

$$S_{EE} \geq \frac{E_B^2}{4 \|\hat{H}_B\|^2}. \quad (7)$$

ここで $\|\cdots\|$ は行列ノルムであり、自己共役作用素の場合、その固有値の絶対値の最大値に一致する。(7)式の不等式は基底状態の量子もつれが大きいときには自明になることがあるが、量子もつれが小さいときには非自明な下限を与える。

QETは有限温度のギブス状態でも有効である。量子もつれは低温領域に存在することもできるが、ギブス状態は純粋状態でないため、EEはその量子もつれ指標になれない。代わりにネガティビティ等の混合状態にも適用できる指標を使う必要がある。基底状態でのQETでは量子もつれがそのリソースであることは明らかであるが、有限温度になると量子ディスコード (quantum discord) 等の量子相関もリソースに使える場合がある。ギブス状態では量子もつれがなくても量子ディスコードを持つこともあり、そしてQETの有効なリソースになっている場合が知られている[16]。ところが量子ディスコードは普遍的なQETリソースではないことも3量子ビット系の解析で明らかになった[17]。有限温度でQETのリソースになる量子相関の一般論はまだ存在していない。

量子多体系の低温領域の熱的状態には、基底状態の量子もつれ構造が大きい影響を与え、局所強受動性という興味深い性質が出てくる。局所的TPCP写像に対応する物理操作で部分系 A から熱エネルギーを取り出すことを考える。ある一定以上の時間を待ちながら部分系間の熱エネルギーのフローを使えば1つの部分系からでも確かに熱エネルギーは取り出せるが、その操作は純粋な意味での局所的操作にはなっていない。そこでその時間スケールより短い時間で局所的に熱エネルギーを取り出せるかを考えてみよう。すると A とその補部分系 \bar{A} の間での基底状態のシュミット分解が最大ランクを持つとき (最大もつれである必要はない) ある閾値温度 T_* が存在して、それ以下の低温では、任意の局所的TPCP写像で記述される操作でも A からエネルギーを取り出せないことが証明できる[18]。これは局所強受動性と呼ばれる。しかしこのような低温領域でも、QETプロトコルを用いれば、部分系

からエネルギーを取り出すことが可能となる。

このように量子多体系のダイナミクスと量子もつれは互いに連動しており、興味深い現象を引き起こす。量子情報物理学的視点は、物性分野でも今後多くの進展をもたらすと期待されている。

参考文献

- [1] A. Kitaev and J. Preskill, Phys. Rev. Lett. 96, 11040,(2006); M. Levin and X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. 96, 110405,(2006)
- [2] 堀田昌寛 「量子情報と時空の物理」(SGC103, サイエンス社)
- [3] 量子エネルギーテレポーテーションのレビューは下記からダウンロード可能.
<http://www.tuhev.phys.tohoku.ac.jp/~hotta/extended-version-qet-review.pdf>
- [4] 石坂智, 小川朋宏, 河内亮周, 木村元, 林正人 「量子情報科学入門」 (共立出版)
- [5] 沙川貴大, 上田正仁 「量子測定と量子制御」(SGC123, サイエンス社)
- [6] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79,(1984).
- [7] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, " *Quantum Computation and Quantum Information* ", Cambridge University Press, Cambridge, p. 90 (2000).
- [8] M. Hotta, Phys. Lett. **A372**: 5671,(2008).
- [9] M. Hotta, J. Phys. Soc. Jap.**78**: 034001,(2009).
- [10] G. Yusa, W. Izumida and M.Hotta, Phys. Rev. A84, 032336,(2011).
- [11] M. Hotta, J. Matsumoto and G. Yusa. Phys. Rev. A 89, 012311,(2014).
- [12] D. Yoshioka, The Quantum Hall Effect (Springer, Berlin, 2002).
- [13] M. Hotta, Phys. Lett. **A374**, 3416,(2010).
- [14] Y. Nambu and M. Hotta, Phys. Rev. A82, 042329,(2010).
- [15] M. Hotta, Phys. Rev. A87, 032313,(2013).
- [16] M. Frey, K. Gerlach, M. Hotta, J. Phys. A: Math. Theor. 46, 455304,(2013).
- [17] J. Trevison and M.Hotta, J. Phys. A: Math. Theor. 48, 175302,(2015).
- [18] M. Frey, K. Funo and M. Hotta, Phys. Rev. E 90, 012127,(2014).