ゲージ・重力対応で探る非平衡統計物理学

中央大学大学院理工学研究科　中村　真

2016年5月

Abstract

前世紀末から今世紀の初頭にかけて、超弦理論の分野では「ゲージ・重力対応」と呼ばれる理論上の大きな発見があった。この対応は、「ゲージ粒子の微視的理論であるゲージ場の量子論が、本来重力を記述するはずの一般相対性理論に書き換え可能である」ことを意味している。この講義では、「ゲージ・重力対応」を応用してゲージ粒子多体系の非平衡物理学を重力理論の枠組みで解析する試みを解説する。重力理論側では微視的理論の粗視化は数本の微分方程式を解く作業に帰着しており、線形応答を超えた非平衡物理の解析を比較的容易に行うことが可能となっている。本講義では、基本的な考え方やその背景を説明することで、今後の研究の良いスタート地点を提供できればと考えている。

なお、本稿では、紙数の関係から全ての解説を記すことが出来なかった。そのため、事前に予習をしておいて欲しい内容を中心に記した。概略のみを記した内容もあるが、実際の講義では、時間が許す範囲で詳細を解説する。

1　本稿について

1.1　本稿の趣旨

本論に入る前に、まず本稿の趣旨を説明しておきたい。ゲージ・重力対応の全貌を短期間に解説することは不可能であるから、講義では物性研究者にとって重要と思われる部分を選択して解説するようにしたい。またその際には、なるべく聴衆が「理解」することを目指し、単なる耳学問で終わらないようにも心掛けたい。本稿はそのような講義の予稿であるが、残念ながら、予定している講演内容全てを紙数の範囲で記述することは出来なかった。

そこで、本稿は予稿というよりも「予習ノート」の立場をとらせて頂きたい。本稿で記述されているのは

- 講義の大まかな流れ
- 講義までに事前に把握しておいて欲しい基礎事項

である。具体的には、一般相対性理論の基礎が本稿の中心となる。ここでは「物性物理学の専門家がゲージ・重力対応を学ぶこと」に特化した解説を書いたつもりである。また、弦の古典力学の基礎も記述した。これらの内容を基礎として講義を進める予定のため、講義の参加者は、本稿の内容を事前に理解して臨んで頂ければと思う。実際の講義では、本稿で触れていない詳細についても解説を行う。

なお、本稿では、3 章以降において、素粒子理論や重力理論の研究者が用いる自然単位系を採用し、$c = \hbar = k_B = 1$ とする。

1.2 参考文献について

ゲージ・重力対応関係の参考文献は枚挙にいとまがないが、物性物理学の専門家が比較的読みやすいと思われる文献を中心にいくつか挙げておく。

ゲージ・重力対応の非平衡物理学への応用に関連する日本語の解説記事としては、[9] がある。これは筆者が非専門家を強く意識して、非平衡物理学への応用の概要を書いた記事である。また、線形応答領域での記述が主であるが、ゲージ理論や弦理論、重力理論の解説も含んだまとまったテキストとして [10] がある。

ゲージ・重力対応そのものの解説記事としては、筆者が原子核理論の専門家向けに行った講義ノートとして [11] がある。ここでは場の理論と超弦理論のアナロジーを用いてゲージ・重力対応の考え方を説明することに力を割いた。また、筆者が素粒子理論の専門家に行ったレクチャーで使用したスライドは [12] からダウンロード可能である。なお、ゲージ・重力対応が提案されて初期の頃に書かれた素粒子理論の専門家向けの簡潔で優れた解説記事として [13] がある。

ブラックホールの熱力学まで含めた一般相対性理論のテキストとしては [14] が有名である。日本語の解説記事としては [15] や [16] がある。超弦理論のテキストとしては、[17] を挙げておく。

2 導入

温度の定義は？と聞かれたならば、皆さんはどのように答えるであろうか。恐らく以下のような答えを思いつくに違いない：

1. 熱力学の視点からの定義：$dE = TdS$
2. 統計物理学の視点からの定義：$P(E_i) \propto \exp[-E_i/k_B T]$
3. 揺動散逸関係式を用いた定義：例えば、$D = k_B T \mu$

ここで、T は温度、E は内部エネルギー、S はエントロピー、$P(E_i)$ はエネルギー E_i の状態が実現する確率、D は拡散係数、μ は易動度である。しかし、現代物理学における温度の定義式はこれだけではない：

4. ブラックホールの Hawking 温度：$k_B T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c}$

これは、κ をブラックホールの表面重力とした時のブラックホールの Hawking 温度を与える式である。本稿の読者は、ブラックホールなるものは宇宙物理学の話であって、それらが合体することで重力波を生むようなことはあっても、統計物理学とは無縁の代物であると考えるかも知れない。しかし、それは正しくない。

最初に、本稿の流れを示しておくことは有益であろう。ブラックホールの Hawking 温度は、ブラックホールから放出される量子場の輻射が温度 T_H の Planck 分布をすることから定義される。この意味では上記 2 の定義に類似している。一方で、ブラックホールの古典的性質を調べると、熱力学の法則に完全に相似な法則があることがわかり、そこでも T_H が温度の役割を果たしている。この意味では上記 1 に類似な定義も成立する。ここまで似ていると、T_H を何らかの温度と解釈したくなる。

しかし、ブラックホールは「1 個の」天体である。1 個の物体が温度を持つとはどういうことであろうか？恐らくは、「1 個」の物体と理解するよりも、「1 個の系」と理解すべきであって、その「系」は多数の微視的な自由度から構成されているのではなかろうか？それでは、その微視的重度とはいったい何なのか？

この疑問に対する一つの答えがゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応) [1, 2] である。ゲージ・重力対応によれば、ある種のブラックホール時空は、ある種のゲージ粒子多体系と数学的に等価である。この対応に従えば、「1 個の」ブラックホールが有していた熱力学量の概念は、多数のゲージ粒子で構成された「1 個の系」の熱力学量であると読み替えられる。

ここで不思議なのは、粗視化のプロセスはどこで起きているのか、ということである。ゲージ理論側では、理論はあくまで微視的理論として与えられている。一方、読み替えを行う重力理論側では、既に粗視化後の巨視的物理量が与えられている。誤解を恐れずに言えば、人類は、この重力への読み替えの過程での「粗視化」のカラクリをまだ完全には理解していない[1]。しかし、Maldacena のゲージ・重力対応の原論文

[1] この事情は講義でより正確に述べる。なお、ここでは粗視化について注目したが、ゲージ・重力対応においては微視的理論の情報も失われずに残っており、粒子の散乱断面積など

[1] が今までに 1 万件以上引用される中で、ゲージ・重力対応の正しさが様々な計算から確認され、一方でその確立された反例は得られていない事実を踏まえると、「ある種のゲージ粒子の微視的理論のマクロな物理が知りたければ、重力理論に書き換えれば良い」という「事実」[2]が、どうやら存在しているらしいのである。

そうであれば、この事実を利用して、非平衡系のマクロな性質の理解のためにゲージ・重力対応を使ってしまおう、というのがこの講義の発想である。例えて言うならば、ゲージ・重力対応は人類が手にした火のようなものである。人類が初めて火を手にした時、人類は決して「なぜ火が燃えるのか」理解はしていなかった。しかし利用することはできた。利用することで文明が発達し、原子・分子の発見や化学反応の理解に至り、そこで初めて燃焼の意味を理解できたのであった。太古の人類が燃焼の意味を完全に理解するまでその利用に躊躇していたならば、人類は今だに未開のままであったであろう。

さあ、ここに燃える火がある。これを手にして使うか否かは、あなた次第である。

3　一般相対性理論と時空の物理学

ゲージ・重力対応において、解析の中心は重力理論、すなわち一般相対性理論である。そこで、講義への参加予定者は、以下の内容がフォローできる程度に、一般相対性理論を事前に復習しておいて欲しい。

まず d 次元時空[3]の座標を一般的に x^μ（$\mu = 0, 1, 2, \cdots, d-1$）で表すことにしよう。$x^0 = ct$ は時間座標であり[4]、x^i（$i \neq 0$）は空間的方向の座標である。計量 $g_{\mu\nu}$ を用いると線素 ds は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{00} dx^0 dx^0 + g_{01} dx^0 dx^1 + \cdots + g_{d-1\ d-1} dx^{d-1} dx^{d-1}, \end{aligned} \tag{1}$$

のように表される。ここで重複する添え字については和の規約を採用し、2 行目のように 0 から $d-1$ までの和をとる。本稿も含め、多くの文献で線素の 2 乗 ds^2 を「計量」と呼ぶ場合があるが、これは実際には (1) の各係数 $g_{\mu\nu}$ を指すものと理解して頂きたい。

最も単純な時空は Minkowski 時空であろう。Minkowski 時空の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2, \tag{2}$$

の微視的過程の計算を重力理論側で行うことも可能である。

[2]数学的に厳密な証明はまだないが、物理的に自然な説明は存在する。

[3]本稿では次元を数える際には時間方向も含めて数えることにする。

[4]c は光速度であるが、以後 $c = 1$ の単位系を用いる。

で与えられる。（ここでは空間方向の座標をまとめて $\vec{x}$ で表した。）この場合、計量は「$-g_{00} = g_{11} = \cdots = g_{d-1\ d-1} = 1$、他の成分はゼロ」の対角的な計量となっている。本稿では、このように Minkowski 時空において $g_{00} < 0$ となる符号のコンベンションを採用することにする。

上記から分かるように、計量は 2 点間の距離の 2 乗を定める役割を持つ。したがって、計量が座標の「非自明な」関数となる時、時空は曲がった時空となる。この計量の座標依存性を定める式が Einstein 方程式である。

一般相対性理論では、重力の理論を時空の力学として記述する。理論の出発点は Einstein-Hilbert 作用

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda\right). \tag{3}$$

である。時空に境界がある場合は適切な境界項を作用に含める必要があるが、ここでは省略する。ここで、G は Newton 定数、g は計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式（$g_{00} < 0$ のため $g < 0$ に注意)、Λ は宇宙項である。R は時空のスカラー曲率であるが、以下の定義を採用している。

$$\begin{aligned}
&R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu},\\
&R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu},\\
&R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta\Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta},\\
&\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_\beta g_{\alpha\rho} + \partial_\alpha g_{\beta\rho}) - \partial_\rho g_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

作用 (3) を計量 $g_{\mu\nu}$ で変分することにより、Einstein 方程式が得られる：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

これらの定義から分かるように Einstein 方程式は計量に関する **2 階の非線形偏微分方程式**である。与えられた境界条件・初期条件のもとでこの方程式を解くことにより、計量が定まり、時空が決まる。

Einstein 方程式にはいくつかの典型的な解がある。簡単のため、ここから 3 章の最後までは、$\Lambda = 0$ かつ $d = 4$ の場合を例にとって解説を進めていくことにする。$\Lambda = 0$ の場合、最も単純な解は Minkowski 時空であり、その計量は (2) あるいは極座標を用いて

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{5}$$

のように表すことができる。ここで空間部分の座標として動径方向を r とした極座標を採用し、線素の「角度方向」の成分は半径 1 の 2 次元球

面の線素 $d\Omega$ を用いて表した。具体的には、標準的な角度変数 (θ, ϕ) を用いて $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ のように与えられる。

一方で、次のような非自明な時空も解となる：

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \\
f(r) &= 1 - \frac{r_H}{r},
\end{aligned} \tag{6}
$$

ここで r_H は Einstein 方程式の境界条件で定まるパラメータであるが、後で見るように Schwarzschild 半径という特別な意味を持つ。Minkowski 時空 (5) は $r_H = 0$ の特別な場合である。

3.1 曲がった時空中の粒子の運動

曲がった時空中での物体の運動の解析は、ゲージ・重力対応の文脈でも非常に重要である。そこで、曲がった時空中の粒子の解析力学について復習しておきたい。

質量 m の点粒子の作用は以下のように与えられる。

$$
S = -m \int d\tau. \tag{7}
$$

ここで τ は固有時であり、

$$
d\tau = \sqrt{-\partial_\xi X^\mu \partial_\xi X^\nu g_{\mu\nu}}\, d\xi \tag{8}
$$

で与えられる。X^μ は時空の「座標」であるが、ここでは X^μ を力学変数として扱うため敢えて大文字としておいた。つまり X^μ は漠然と時空に張られた座標というよりも、今記述しようとしている粒子の「位置」を表す。これは運動方程式によって決定される力学変数である。一方、ξ は理論の構成のために便宜上導入した座標である。いわば粒子の軌跡に沿って振った目盛であり、その目盛の振り方は我々の任意である。ためしに $\xi \to \xi' = h(\xi)$（$h(\xi)$ は性質の良い ξ の関数）のように変換を行っても理論が不変であることを確認できる。

教科書でよく見かけるのは $\xi = t$ とする記述である。これは粒子の軌跡上の目盛を、その通過時刻で振っていこうという方法である。(8) は後で述べる弦の力学を論ずる際に参考になる書き方であるが、ここでは簡単のために $\xi = t$ として話を進めることにする。この場合、粒子の作用は

$$
S \equiv \int L dt = -m \int dt \sqrt{-g_{00} - (\dot{X}^i)^2 g_{ii}}, \tag{9}
$$

となる。ただし、計量は対角的であると仮定し、i の添え字は 1 から 3 までの和をとるものとした。またドットは時間微分を表し、$\dot{X}^0 = 1$ を用いている。例えば、(9) から読み取られる Lagrangian（L）を用いて x^1 方向の正準運動量を計算すると、$\dot{X}^1 = v$ として

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^1} = \frac{mvg_{11}}{\sqrt{-g_{00} - v^2 g_{11}}}, \tag{10}$$

となる。Minkowski 時空の場合（$-g_{00} = g_{11} = 1$）を考えると特殊相対性理論の教科書でおなじみの式が得られることがわかる。（ここでは $c = 1$ としていることに注意。）

それでは、粒子が感じる重力ポテンシャルを計算してみよう。Minkowski 時空の場合は計量が定数であり、Lagrangian は X^j を顕わに含まない。このため $\partial L/\partial X^j = 0$、すなわち粒子に力は働かない。次に、(6) で与えられる時空の場合を考えてみよう。簡単のために粒子が静止している（$\dot{X}^i = 0$）場合を考えると、$L = -m\sqrt{-g_{00}}$ であり、これが r に依存している。無限遠方（$r \gg r_H$）では

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{mr_H}{2r^2} = -G\frac{Mm}{r^2}, \tag{11}$$

ただし、最後の式では

$$r_H = 2GM \tag{12}$$

とおいた。これは無限遠方では質量 $M = r_H/2G$ の天体の周囲で質量 m の粒子が感じる重力に一致することを意味する。このように、非自明な計量は重力の影響を記述している。逆に、重力が存在する時空では計量が非自明になっている。

3.2 ブラックホール

(6) で与えられる時空は Schwarzschild 時空と呼ばれ、興味深い性質を持っている。前節で見たように、無限遠方では質量 M を持つ天体の周囲の時空という解釈が成立する。しかし、$r = r_H$ において $g_{00} = g_{rr}^{-1} = 0$ となり計量が特異的である。

試しに、$r = r_H$ 近傍（$r = r_H + \epsilon$、$\epsilon > 0$）から動径方向に発せられた光が時空内の点 $r = r_H + r_0$（$r_0 > \epsilon$）へ届くまでに要する時間 $\triangle t$ を計算してみよう。光の軌跡は $ds^2 = 0$ で与えられるため、(6) から $dt = f^{-1} dr$ が得られる。（動径方向への軌跡を考えたため $d\Omega = 0$ とした。）従って、

$$\triangle t = \int_{r_H+\epsilon}^{r_H+r_0} \frac{dr}{f(r)} = r_0 - \epsilon + r_H \log\frac{r_0}{\epsilon}, \tag{13}$$

となり、限りなく $r = r_H$ に近い点（$\epsilon \to 0$）から発せられた光は、$r = r_H + r_0$ の点に到達するまでに無限の時間が必要なことがわかる。

実際のところ、$r = r_H$ の内側から発せられた光は $r = r_H$ の外側には決して脱出できないことを示すことができる。そのため、半径 $r = r_H$ の内側は外部から見ると黒い穴のように見えることになり、ブラックホールと呼ばれている。

ここで注意したいのは、$r = r_H$ では (6) の g_{rr} が発散しているが、これは見かけの発散であり物理的発散ではないということである。例えば次のような関係を満たす新たな座標 r^*（亀座標とも呼ばれる）を考えよう。

$$dr^* = \frac{dr}{f(r)}. \tag{14}$$

すると、(6) は

$$ds^2 = f(r)\left(-dt^2 + (dr^*)^2\right) + r^2 d\Omega^2 \tag{15}$$

となる。さらに $v \equiv t + r^*$ を導入すると、この計量は

$$ds^2 = -f(r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{16}$$

となる。このように (v, r) を用いた座標系は（内向き）Eddington-Finkelstein 座標と呼ばれている。この座標系では ds^2 の各項のいかなる係数も $r = r_H$ で発散していない。このため、Eddington-Finkelstein 座標を用いると、時空を $r < r_H$ の領域までスムーズに伸ばすことが出来る。$r < r_H$ の領域から光は脱出できないため外部から $r < r_H$ の領域を見ることは出来ないが、しかし時空は $r < r_H$ の領域まで続いているのである。この意味で $r = r_H$ の面を「事象の地平線」（event horizon）と呼ぶ。細かく言うと定義によって horizon にはいくつかの種類があるが、本稿では深入りしないこととし、単にホライズンと記すことにする。

ところで、一般相対性理論において、物理量とは座標変換によって変更を受けない量、すなわちスカラー量として定義される。この意味で、座標の選び方によって変更を受ける計量自身は物理量ではない。一方で、時空の曲率 R などはスカラー量である。宇宙項がゼロの理論においては $r = r_H$ の直上においても $R = 0$ となることは Einstein 方程式から簡単に示すことができる。またリーマンテンソルの 2 乗から構成したスカラー量 $R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$ もホライズン上では有限である。まれに見られる誤解として、「ホライズン上で物理量が発散する」という誤解があるが、実際にはホライズン上ではスカラー量は有限値にとどまり、物理量は発散しない。

3.2.1 表面重力

例えば、以下のような問題を考えてみよう。単位質量の粒子をホライズン上に静止させることを考える。ただし、この粒子は質量ゼロの仮想的なロープで無限遠から吊り下げられている。無限遠点でこの粒子を支えるために必要な力（κ とする）はどのくらいであろうか？

κ を見積もるために、ロープの長さは変化させずにホライズン上の粒子の r 座標を「ゆっくりと」微少に $\delta r > 0$ だけずらす操作を考えてみる。静止している単位質量の粒子のエネルギーは $\sqrt{-g_{00}}$ であるから、このときの粒子のエネルギー変化は $\frac{\sqrt{-g_{00}}}{\partial r}|_{r=r_H}\delta r$ であろう。このとき無限遠点での力がした仕事はいくらであろうか。r 座標を δr だけ変化させた場合に実際に動く距離は $\sqrt{g_{rr}}\delta r$ となる。従って、ロープの長さを変化させずにホライズン上で δr だけずらすことは、無限遠方では（$r=\infty$ において $g_{rr}=1$ であるとして）$\sqrt{g_{rr}}|_{r=r_H}\delta r$ だけ端点をずらすことに他ならない。仕事が釣り合うためには

$$\left.\frac{\partial\sqrt{-g_{00}}}{\partial r}\right|_{r=r_H}\delta r = \kappa\sqrt{g_{rr}}|_{r=r_H}\delta r. \tag{17}$$

従って

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\left.\frac{\partial\sqrt{-g_{00}}}{\partial r}\right|_{r=r_H}. \tag{18}$$

ここで $-g_{00}=1/g_{rr}=f(r)$ を用いると

$$\kappa = \left.\frac{1}{2}f(r)'\right|_{r=r_H} = \frac{1}{4GM} \tag{19}$$

となり、たとえホライズン上に位置する物体であっても、無限遠にいる観測者は有限の力で支えることが可能なことがわかる。

今ここで計算した κ はブラックホールの**表面重力**と呼ばれる。これはブラックホールのホライズン上での重力加速度を**無限遠での観測者の視点で**測定した値である。表面重力の正式な定義としては、Killing vector と呼ばれるものを用いた定義を採用するべきであると考えるが、ここでは立ち入らないことにする。

3.3 ブラックホールの熱力学

ここで、既に知られているブラックホールの性質についてまとめてみたい。興味深いことに、ブラックホール時空の物理的性質は熱力学の法則と類似していることが分かる（表 1）ここで、T、S、E はそれぞれ熱力

Table 1: 熱力学とブラックホールの物理の類似.

	熱力学	ブラックホール
第0法則	熱平衡で T 一定	定常解で κ 一定
第1法則	$dE = TdS$	$dM = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{dA}{4G}$
第2法則	S は減少しない	A は減少しない
第3法則	$T = 0$ にできない	$\kappa = 0$ にできない

学における温度、エントロピー、内部エネルギーであり、κ、A、M はそれぞれブラックホールの表面重力、ホライズンの面積、ブラックホールの質量である。例えばブラックホールの「第2法則」は、直観的には以下のように理解できる[5]。ブラックホールからは古典的には何物も脱出できず、物質は吸い込まれる一方である。従ってブラックホールのホライズンの面積は増大する一方である。Einstein-Hilbert 作用 (3) そのものは時間反転に対して対称に構成されているが、物質を吸い込む一方であるブラックホールという「解」が時間反転対称性を破っており、ここに「時間の矢」すなわち「不可逆性」が生じていることもわかる。

第1法則については以下のように検算することができる。例えば (6) で与えられるブラックホールでは、ホライズンの面積は

$$A = 4\pi r_H^2 = 16\pi G^2 M^2, \tag{20}$$

であるから

$$dA = 32\pi G^2 M dM \tag{21}$$

従って

$$dM = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{4GM}\frac{dA}{4G} = \frac{\kappa}{2\pi}\frac{dA}{4G} \tag{22}$$

が成立している。

このように、表1から (T, S, E) と (κ, A, M) の間には対応が成立していることがわかる。従って、表面重力を温度に、ホライズンの面積をエントロピーに見立てると、ブラックホールの性質は、あたかも熱力学の第0法則から第3法則までに符合する。しかし、この時点では単なる類似性であり、ブラックホールに熱力学が存在すると結論するのは、この段階ではいささか早計である。

[5] 厳密な証明は非自明である。

3.4 Hawking温度の計算

ブラックホールに本当に「熱力学」が存在するのであれば、表面重力は「温度」であると解釈できなければならない。Hawkingはブラックホール時空上の場を量子化し、ブラックホールが黒体輻射（Hawking輻射）を行うことを発見した [3]。彼の計算によれば、その輻射の温度はまさに

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{23}$$

で与えられ、表面重力 κ（の定数倍）が温度の意味を持っていることが明らかとなった。このブラックホールの温度のことをHawking温度と呼ぶ。例えば (6) のブラックホール時空では (19) を用いて

$$T = \frac{1}{8\pi GM} \tag{24}$$

となる。

このHawking温度の計算には以下のような簡便法があるので紹介したい。ここで、有限温度の場の理論を思い出して欲しい。有限温度の場の理論では、虚時間を導入して時空をEuclid化し、その虚時間の周期を逆温度 β と同定した。同じ議論がブラックホールにも通用することを見るために、(6) のブラックホール時空をEuclid化してみよう。以下の議論では (t, r) 方向のみを議論するため、(6) の計量のうち関係する部分のみを書くと

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \tag{25}$$

この時空をEuclid化するとは、$t \to -it_E$ と置き換える[6]ことであるから、Euclid化した計量は

$$ds_E^2 = f(r)dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)}. \tag{26}$$

この計量のホライズン近傍での振る舞いを調べよう。一般にホライズン近傍では

$$f(r) = a(r - r_H) + \cdots \tag{27}$$

のように展開できるため、ホライズン近傍での計量 (26) は

$$ds_E^2 = a(r - r_H)dt_E^2 + \frac{b}{(r - r_H)}dr^2. \tag{28}$$

[6]Euclid化前の作用を S、Euclid化後の作用を S_E（$S_E \geq 0$）としたとき、e^{iS} がEuclid化後に e^{-S_E} となるように虚数単位の前の符号を選ぶ。

となる。ここで (26) の場合は $a = 1/b$ であるが、より一般の場合にも適用できるように敢えて定数 a と定数 b を独立して記しておく。ここで

$$a(r - r_H) = \rho^2 \tag{29}$$

とおくと、$2\rho d\rho = adr$、従って

$$ds_E^2 = \rho^2 dt_E^2 + \frac{4b}{a} d\rho^2 = \frac{4b}{a}\left(d\rho^2 + \frac{a}{4b}\rho^2 dt_E^2\right). \tag{30}$$

上式の $d\rho^2 + \frac{a}{4b}\rho^2 dt_E^2$ の部分は 2 次元極座標の計量 $dr^2 + r^2 d\theta^2$ と同様の構造をしている。2 次元極座標の場合、θ の周期を 2π にしないと、原点が円錐の頂点のように singular となってしまう。時空が正則であることを要請するとこのような singularity（conical singularity）は許されない。同様に、(30) においてもホライズン近傍の正則性を要求すると、$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}t_E$ の周期が 2π であることが要求される。このため、t_E の周期 $\triangle t_E$ は任意ではなく、

$$\triangle t_E = 4\pi\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{31}$$

に定まる。虚時間の周期を逆温度と同定すると、温度 T は

$$T = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{b}} \tag{32}$$

のように、ホライズン近傍の計量を用いて定まることになる。(6) の場合は

$$f(r) = r_H^{-1}(r - r_H) + \cdots \tag{33}$$

であるから $a = 1/b = r_H^{-1}$ であり、

$$T = \frac{1}{4\pi r_H} = \frac{1}{8\pi GM} \tag{34}$$

である。これは Hawking が当初別の方法で求めた Hawking 温度 (24) と一致する。

4　ゲージ・重力対応への道

このように、ブラックホールには温度の概念が存在し、ブラックホールの物理は熱力学の法則を満たすことがわかった。しかし、表 1 での対応は以下の点で奇妙である。

1. 次元の問題
   ブラックホールのエントロピーは、そのホライズンの面積に比例する。しかしエントロピーは示量性の物理量であるから、むしろブラックホールの「体積」に比例すべきではないのか？しかし実際には体積ではなくホライズンの面積に比例するのであるから、次のように考えるしかない。つまり (6) のような 4 次元時空内のブラックホールは、空間 2 次元の系の熱力学を記述しているのである。この考えを進めると、空間 3 次元の熱力学系をブラックホールで記述したければ、**5 次元**時空内のブラックホールを考えて、そのホライズン部分（r 座標に $r = r_H$ で直行する $(t, \vec{x})$ で張られる部分空間）が空間 3 次元を持つように設定しなければならない。
2. 比熱の問題
   (34) を見ると、ブラックホールの質量（エネルギー）が温度に反比例している。これは比熱が負であることを意味し、熱力学的には ill-defined な系である。

4.1 AdS 時空

実は、比熱が正となるブラックホールを作ることが出来る。その典型的な例は、AdS 時空中のブラックホールを考えることである。AdS 時空とは Anti de Sitter 時空の略であり、例えば次のような計量で与えられる。

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2, \tag{35}$$

ここで L は AdS 時空の半径と呼ばれる正のパラメータである。この時空は負の曲率を持ち、$\Lambda = -6/L^2 < 0$ の Einstein 方程式の解となっている。

この時空は Minkowski 時空と決定的な違いがある。その一つは時空の**境界の存在**である。(13) と同様に、時空の任意の点（$r = r_0$）から r 方向に発せられた光が $r = \infty$ に到達するまでの時間 $\triangle t$ を計算してみよう。$ds^2 = 0$ から $dt = L^2 r^{-2} dr$ であり

$$\triangle t = \int dt = L^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{L^2}{r_0}, \tag{36}$$

従って、**有限の時間で** $r = \infty$ に到達してしまう。同様の計算を Minkowski 時空で行えば $dt = dr$ により無限の時間が必要である。この結果は、AdS 時空における $r = \infty$ の点は「無限遠点」ではなく、そこでの物理的情報が時空内部に影響を及ぼすことを意味する。この意味で (35) におけ

る $r=\infty$ の点を**AdS時空の境界**（boundary）と呼ぶ。ゲージ・重力対応では、この境界の存在が決定的に重要な役割をはたす。

それでは、具体的に AdS 時空上のブラックホールの比熱を計算してみよう。空間 3 次元系の熱力学に対応するように、5 次元 AdS 時空を考え、その中の Schwarzschild ブラックホールを考える。この時空の計量は

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}\left(-f(r)dt^2 + d\vec{x}^2\right) + \frac{L^2}{r^2}\frac{dr^2}{f(r)}, \tag{37}$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_H^4}{r^4}, \tag{38}$$

で与えられる。あとは 3.4 章と同様の計算を行えば Hawking 温度が計算できる。ホライズン $r=r_H$ 近傍で

$$\frac{r^2}{L^2}f(r) = \frac{4r_H}{L^2}(r-r_H) + \cdots \tag{39}$$

となるため、(28) における $a = 1/b = 4r_H/L^2$ であり、Hawking 温度は

$$T = \frac{r_H}{\pi L^2} \tag{40}$$

となる。(34) の場合と異なり、T は r_H に比例している。

AdS 時空中のブラックホールの場合、$r=\infty$ においても時空は平坦とはならないため、ブラックホールの「質量」、あるいは系のエネルギーの定義は (11) での M を決定する議論よりも複雑となる。実際には、5 次元 AdS 時空中の Schwarzschild ブラックホールの場合、系のエネルギーは r_H^4 に比例する形で与えられることがわかっている。従って、この系の比熱は正である。このように 5 次元 AdS 時空中のブラックホールを考えれば上記 1、2 の問題は解決される。

4.2 ゲージ・重力対応の主張

以上の考察から類推されるのは、5 次元 AdS 時空に埋め込まれた Hawking 温度 T のブラックホール時空は、4 次元（空間 3 次元）の「温度 T の何らかの熱平衡系」に対応しているのではないか、ということである。さらに、$T\to 0$ の極限（$r_H \to 0$ に相当）をとればホライズンは消滅し、重力理論側は純粋な 5 次元 AdS 時空（AdS_5 と書くことにする）となる。したがって、5 次元 AdS 時空は「（温度ゼロの）何らかの理論」を記述しているのではないかと推測される。しかし、このままでは単なる類推に過ぎない。そもそも、「何らかの理論」とは何であろうか？

実は、D-brane と呼ばれる、超弦理論の非摂動的な解を用いた考察を行うことで、重力理論とゲージ理論の対応を自然かつ**具体的に**予測することができる。その議論で得られる対応の代表的なものは以下のようなものである [1]。

ゲージ・重力対応の代表例

4 次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ large-N_c 超対称 Yang-Mills 理論の $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1$ 極限の量子論は、$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ 上の古典 type IIB 超重力理論と等価である。

上記の説明を行うには超弦理論および場の量子論の基礎を避けて通ることができない。しかし残念ながら、本稿ではその詳細を述べることは紙数の制限から不可能である。ここでは用語の説明を簡単に述べるにとどめ、詳細は講義にて可能な範囲で説明することにする。

- 超対称性
  boson と fermion の入れ替えの対称性。超対称変換には何通りかの定義が可能であり、$\mathcal{N} = 4$ とは、理論が 4 種類の超対称変換のもとで、不変に作られていることを示している。
- Yang-Mills 理論
  非可換ゲージ理論。ゲージ対称性を表現するゲージ群が非可換群となっているゲージ理論である。ここではゲージ群として $SU(N_c)$ を考えている。クォーク・ハドロン物理学の基礎理論である QCD のゲージ群は $SU(3)$ である。QCD における呼称をそのまま用いて N_c を「カラー（color）の数」と呼ぶ。本稿では Yang-Mills 理論のことを単に「ゲージ理論」と呼ぶことにする。
- large-N_c ゲージ理論
  $SU(N_c)$ ゲージ理論で $N_c \to \infty$ の極限をとった理論。別の言い方をすれば、N_c が有限の $SU(N_c)$ ゲージ理論において物理量を $1/N_c$ で展開し、その leading order を扱う近似であると理解しても良い。なお、もとの $SU(N_c)$ ゲージ理論の相互作用の強さ（結合定数）を g_{YM} とした時、large-N_c ゲージ理論では有効結合定数が $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$ で表される[7]。従って、$\lambda \gg 1$ の極限とは、強結合極限である。λ のことを「't Hooft 結合定数」と呼ぶ。
- $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$
  S^n とは n 次元球面のことである。例えば S^1 は円、S^2 は通常我々が目にする 3 次元空間内の球の表面である。超弦理論は 10 次元時空で定義されているため、超弦理論から導出されるゲージ・重力

[7] 正確には、large-N_c 極限は λ を有限に保ったまま $N_c \to \infty$、$g_{YM} \to 0$ の極限をとる操作である。

対応では、重力側の時空は 10 次元となる。$\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ とは、その 10 次元のうち 5 次元部分が S^5 に丸まって（コンパクト化されて）おり、残りの「広がった」5 次元部分が AdS_5 となっていることを意味している。多くの解析では S^5 部分を除外して、重力理論は 5 次元の AdS_5 時空であるとした立場で出発しても問題ない。本稿でもそのような立場を採用する。

- 超重力理論
  重力理論（一般相対性理論）に超対称性を導入した理論。重力子の他に、スカラー場やテンソル場、それらの超対称パートナーである fermion 場などを含んでいる。10 次元超重力理論にはいくつかの種類が知られており、type IIB 超重力理論とは、そのうちの一つである。本稿の多くの場所では、この超重力理論のことを単に「一般相対性理論」と呼んでいる。

これらの詳細説明には紙数が足りないことを、理解して頂けたものと思う。そこでここでは、ゲージ・重力対応の導出や各理論の詳細な説明よりも、ゲージ・重力対応がどのように利用可能となるのか、その概要を提供することにしたい。

なお、ゲージ・重力対応の視点から、(38) の時空に関するコメントがいくつかある。この時空は上記 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論の有限温度系を記述するが、超弦理論の D-brane を用いた議論を経由すると (38) のパラメータ L とゲージ理論のパラメータに関係がつく。具体的には

$$L^4 = 2\lambda l_s^4 \tag{41}$$

の関係がある[8]。ここで l_s は超弦理論における弦の長さスケールであり、超弦理論に現れる弦の張力 T_s と

$$T_s = \frac{1}{2\pi l_s^2} \tag{42}$$

の関係がある。このように書くと、l_s という余分なスケールが議論に混入してきたように感じるかも知れないが、ゲージ・重力対応で正しくゲージ理論の物理量を計算すると、全てがゲージ理論のパラメータを用いて表され、（本来無関係であるはずの）l_s が単独で最終結果に残ることはない。

[8] ゲージ・重力対応の文献によっては、ここの 2λ を λ と定義している文献も少なくないため、注意が必要である。

5　非平衡物理学への応用

そもそも、非平衡物理学はなぜ難しいのであろうか？それは、平衡系で用いることのできた重要な基本原理を、非平衡系では前提として用いることができないからである。ここで、重要な基本原理とは次のようなものをさす。

- 詳細つり合いの原理
- 等重率の原理
- 平衡系の熱力学の法則

例えば詳細つり合いの原理を用いると、平衡状態における確率分布が古典的にはボルツマン分布に、量子的にはボーズ／フェルミ分布となることが、極めて一般的に示される。あるいは同様の結論は等重率の原理や平衡系の熱力学の法則を用いることでも得ることができる。一旦、確率分布が決まれば、一つ一つの微視的自由度の力学を追わずとも、物理量の統計物理学的な期待値を計算することが可能となった。

問題は、非平衡状態では上記の基本原理を前提とすることが出来ず、従って確率分布もどのようなものが実現するのか良く分からないのである。それゆえ、巨視的な物理量の期待値を計算することは、一般には難しい問題となる。

それでは通常、非平衡系の解析を行うには、どのようなアプローチを選ぶのであろうか、典型的には以下のようなアプローチであろう：

1. まず熱平衡状態を用意する。
2. 系に外力を加えることで、系の状態を非平衡にドライブする。
3. 物理量の期待値の時間発展を刻一刻と追うことができれば、終着点の非平衡状態における物理量の期待値を知ることができるであろう。

このようなアプローチにおいて、外力を摂動として扱い、その摂動の一次までで近似を行うのが線形応答理論の考え方であった。それでは、摂動の無限次までの計算が可能であれば、全ての非平衡現象を記述可能であろうか？答えは NO である。

そもそも、摂動展開は一般には漸近展開であって、適切な次数までで計算を止めると有効な近似を与えるが、無限次までの足し上げを行うと一般には収束しない[9]。さらに、摂動では記述し得ない、非摂動的効果が存在する。これは例えば、相転移現象のように基底状態が不連続に転移する現象などである。摂動論を定義する際は、ある基底状態を定義

[9] もちろん、収束するような特別な場合もある。

し、そこからの摂動展開を行うが、その基底状態そのものが不連続に転移する現象を記述する際には、摂動論の枠組みそのものが破綻するのである。

従って、願わくば、非平衡状態を、外力に対して「非摂動的に」解析する枠組みが欲しいのである。そのような手法として思いつくのは

- 実際に実験をする
- 数値シミュレーションをする

そして、上記以外の手法として、「ゲージ・重力対応の応用」が存在するのである。

上で述べたように、非平衡物理学の困難は、微視的理論と巨視的物理をつなぐ「粗視化」の困難にあった。しかし、ブラックホールの物理学で見たように、重力理論では、この粗視化は重力理論側の運動方程式（Einstein 方程式）—これは非線形偏微分方程式であった—を解くだけで、巨視的物理量や巨視的物理量の間の法則が「勝手に」得られたのであった。不思議なことだが、重力理論は粗視化の手法を「知って」いるようである。

ゲージ・重力対応を用いた非平衡系の解析にあたっての考え方は以下の通りである：

- 熱平衡状態を用意する（ブラックホール時空）
- 系に外力を加えることで、系の状態を非平衡にドライブする
- 外力存在下での時空の運動方程式を解く

最後のステップでは、外力は「重力の運動方程式を解く際の境界条件」として導入される。従って、このステップは最初の熱平衡状態を求める際と同じ方程式を、しかしながら（外力に依存した）非自明な境界条件のもとで解く、という作業に相当する。そして、この境界条件を指定する外力は、必ずしも微少である必要はない。その境界条件の下での微分方程式が解ければ良いのである。

境界条件（すなわち外力の加え方）次第では、解が分岐して複数の解が得られる場合もある。この場合はよりエコノミックな[10]解が選択されるであろう。パラメータの値によって、エコノミックな解が転移を起こす場合が相転移に相当する。

[10]正確な意味は講義で述べる。

6　非平衡定常系

6.1　非平衡定常状態

ここまでは、重力理論を用いて平衡系を記述し、さらに外力をかけて系をドライブし、この過程を重力理論側で追いかけることで終状態の非平衡系の重力理論による記述に到達する、といった一般的シナリオを描いてきた。最後の非平衡状態に対応する重力理論側の物理量を、もとのゲージ理論の多粒子系の物理量に「ゲージ・重力対応」を用いて翻訳しなおせば、非平衡状態での多粒子系の物理を読み取ることが出来るであろう。これが大まかなシナリオである。

しかし、例えば、外力によって時間発展する Einstein 方程式を解く作業は、実行可能ではあるものの、一般的には数値計算を必要とする大変な計算にはなる。我々はこれから非平衡物理学という難問に挑戦するのであるが、まずは可能な限り単純な問題から挑戦していくべきであろう。このような単純だが非自明な問題に、非平衡定常状態の問題がある。

非平衡状態は大きく二つに分類することができる。一つはマクロ変数が時間変化する状態、もう一つはマクロ変数が時間変化しない状態である。マクロ変数が時間変化しない非平衡状態を非平衡定常状態と呼ぶ。非平衡定常状態の例としては、例えば、熱浴に接したヒータに一定の電力が供給されている場合を考えることができる。

この場合、ヒータには電場という形で外力が加わっており、この外力が単位時間あたりに行う仕事、すなわち電力はヒータの中で熱へと変換される。この熱はヒータが接する熱浴に散逸される。熱浴への散逸と電力による熱生成が釣り合っている場合、ヒータという着目系に残るエネルギーは差し引き一定となる。ヒータでは熱が生成されているため平衡状態にはないが、しかしながら定常状態ではあり、非平衡定常状態が実現している。このように非平衡定常状態を実現するには、

- 着目系（今の例ではヒータ）
- 外力
- 熱浴

の 3 要素が必要であることがわかる。

6.2　重力双対での非平衡定常状態

それでは、この 3 要素を重力理論側でどのように構成できるのかについて述べたい。熱浴は、熱平衡状態にあり、比熱が（着目系で生成される熱量に比べ）十分大きな系を準備すれば構成できる。これはブラック

ホール時空を用いて構成可能である。また、外力は、着目系の運動方程式に対する境界条件として設定が可能である。

問題は、着目系である。これはブラックホール時空とは別の系として準備しなければならない。ここでは、ブラックホール時空という「入れ物」の中に、着目系を表現する「部分系」を設置することになる。この部分系は、典型的には

- D-brane
- string（弦）

といった、超弦理論の枠内に存在する物理的要で構成することになる。

ここでは、弦を用いる場合についてさらに説明を行う。（D-brane を用いる場合については講義で解説する。）弦を用いて構成される非平衡定常系は、熱浴中を外力によって一定速度で牽引されるテスト粒子の系（ここでは Langevin 系と呼ぶことにする）である。重力理論の描像では、このテスト粒子が弦で構成される。

ここに「粒子」ではなく「弦」が現れる理由は、以下のようになる。元来、ゲージ・重力対応は超弦理論の枠組みで構成されている。その「名残り」としてテスト粒子の記述には「弦」が必要となる。あるいは、以下のように納得することも出来るかも知れない。重力理論側の次元はゲージ理論側の次元よりも 1 次元多かった。この余分な方向は (38) の r 方向である。逆に言うと、r 座標以外の座標（r に垂直方向）はゲージ理論を記述する座標 $(t, \vec{x})$ と共通である。これはホライズンの広がる方向でもあり、また AdS 時空の境界面の方向でもある。つまり境界面の次元は重力理論の次元よりも 1 次元低く、ゲージ理論の次元と同じである。従って、重力理論に長さのある弦を導入しても、その弦が r 方向に伸びている限り、境界面とは点で交わる。よって境界面の $(t, \vec{x})$ 座標の視点、すなわち対応するゲージ理論の次元の視点では、このような弦は「点粒子」として認識されるのである。

この描像に基づくと、Langevin 系の設定は次のようになる：

- 熱浴として AdS_5 中のブラックホールを用意する。
- 時空の境界から時空内に弦を垂らす。（テスト粒子の導入）
- 垂らした弦の境界上の端点を、境界面に沿った方向（例えば x^1 方向とする）に速度 v で動かす。（弦の境界条件の設定：テスト粒子を牽引する外力の導入）

このような設定から得られる情報は、例えば以下のようなものがある：

- 弦（テスト粒子）がブラックホール時空（熱浴）から受ける力（摩擦力）が v の非線形な関数として計算される。

- 牽引されている弦（テスト粒子）の振動（揺らぎ）を解析することで、非平衡定常状態における揺動散逸関係式や有効温度の情報が得られる。

いずれにせよ、重力側で扱う物理は、ブラックホールという曲がった時空上を運動する弦の力学であり、これは与えられた境界条件の下での運動方程式を解く作業となる。難しいはずの、線形応答を超えた範囲での非平衡定常状態の解析が、微分方程式を解くという遂行可能な作業に帰着するのである。

なお、摩擦力が具体的に計算可能という事実は、「特定の微視的理論で定義された特定の系」の物理量を具体的に計算していることに他ならない。例えば次節で計算する例は、「$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論で構成した熱浴中をクォークが一定速度で牽引された場合の摩擦力の計算」となる。様々な物理量が具体的に（場合によっては解析的に）計算されるのは良いが、得られた結果の一般性が気になるのも事実である。この意味では、ゲージ・重力対応による解析は**「理論実験」**であると理解すべきである。つまり、特定のモデル設定に立脚した、（シミュレーションでも思考実験でもなく、数式を駆使した）理論的な実験であり、得られた結果は、そのモデルに特化した「データ」である。この意味では「$\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論」という仮想的な理論での輸送係数を求めても意味がないと思われる方もいるであろう。問題は、このように得られた「データ」から一般的な情報を如何に引き出すかである。それは、そのデータ解析を行う我々理論屋のセンスにかかっている。

このように述べると、いささか負の印象を持たれるかも知れないが、しかしながらゲージ・重力対応を用いることで、明確に計算可能な非平衡定常状態のモデルを手にすることができ、これを通じて、仮説や予想の検証を行ったり、反例を発見したり、他のモデルでは得られていなかった新現象を発見したりすることが可能となる。また、重力側に現れる式には、モデルによらず極めて一般的に成立するものと、モデルに強く依存するタイプのものがあり、このような視点から、得られた結果の一般性を推測することもある程度可能である。

筆者は、このような意味で、ゲージ・重力対応による解析から、現実の非平衡定常状態の物理の一般的性質について示唆を得ることは可能であると考えている。いずれにせよ、得られた結論の是非の最終判断は実験による検証でなされることになるが、これは全ての理論が負う宿命である。

6.3 Langevin 系

それでは、実際に弦の運動を解析し、テスト粒子が受ける摩擦力を v の非線形な関数として求めてみよう。（原論文は [4]。）

相対論的な弦の作用は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
S &= -T_s \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{-\det h_{ab}}\,, &(43)\\
h_{ab} &= g_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu, &(44)
\end{aligned}
$$

これは、点粒子の作用 (7) を弦に拡張したものである。(7) では作用が粒子の 1 次元的軌跡（世界線）に沿った 1 次元の積分で現されていたが、弦の軌跡（世界面）は 2 次元面となるため、積分も 2 次元の積分となる。(7) の積分の前の係数は質量 m であったが、ここでは弦の張力 T_s に置き換わっている。(8) における固有時は弦の長さ方向が加わるため、固有時と固有長さの積に拡張されている。弦の作用は、大雑把には（相対論的な）長さ×質量で与えられていたが、弦の作用は（相対論的な）面積×張力で与えられるのである。ここで a、b の添え字は世界面上の (ξ^0, ξ^1) 座標に対応した添え字であり、0 または 1 をとる。また h_{ab} は誘導計量（induced metric）と呼ばれ、世界面上の (ξ^0, ξ^1) 座標から見た計量である。(43) は南部・後藤作用と呼ばれている。

双対時空 (38) の境界において弦の端点が x^1 方向に一定速度 v で運動しているとする。弦の世界面の座標と時空座標の関係として $(\xi^0, \xi^1) = (t, r)$ を選ぶ（static gauge）。弦の配位を

$$
X^1(t,r) = vt - x(r) \tag{45}
$$

のように仮定し、関数 $x(r)$ を具体的に求める問題を考えよう。誘導計量は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
h_{tt} &= \partial_t X^0 \partial_t X^0 g_{00} + \partial_t X^1 \partial_t X^1 g_{11} = g_{00} + v^2 g_{11},\\
h_{rr} &= \partial_r r \partial_r r g_{rr} + \partial_r X^1 \partial_r X^1 g_{11} = g_{rr} + (x')^2 g_{11},\\
h_{rt} &= h_{tr} = \partial_r X^1 \partial_t X^1 g_{11} = -x' v g_{11}. &(46)
\end{aligned}
$$

ここで $'$ は r 微分を表す。従って、Lagrangian 密度は

$$
\mathcal{L} = -T_s \sqrt{-g_{00}(g_{rr} + (x')^2 g_{11}) - v^2 g_{11} g_{rr}}, \tag{47}
$$

で与えられ、Euler-Lagrange 方程式は

$$
0 = \partial_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} \tag{48}
$$

となる。（$\mathcal{L}$ は x を顕わに含まないことに注意。）(48) を積分すると、F を負でない定数として

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = -T_s \frac{-g_{00} g_{11} x'}{\sqrt{-g_{00}(g_{rr} + (x')^2 g_{11}) - v^2 g_{11} g_{rr}}} \equiv -F. \tag{49}
$$

これを x' について解くと

$$(x')^2 = \frac{F^2}{T_s^2}\frac{g_{rr}(-g_{00}-v^2g_{11})}{-g_{00}g_{11}(-g_{00}g_{11}-F^2/T_s^2)} \tag{50}$$

となる。

ここで (50) を注意深く吟味してみよう。g_{00} は $r=r_H$ でゼロとなるが、一方で境界では発散している。従って、$-g_{00}-v^2g_{11}$ や $-g_{00}g_{11}-F^2/T_s^2$ は、境界とホライズンの間のどこかで符号が反転する。しかし (50) の左辺は負符号となることができない。この条件を満たすためには、$-g_{00}-v^2g_{11}$ と $-g_{00}g_{11}-F^2/T_s^2$ が同じ地点（$r=r_*$ としておこう）において同時に符号反転するしかない。この条件は

$$\Big(-g_{00}-v^2g_{11}\Big)\Big|_{r=r_*} = 0, \tag{51}$$

$$\Big(-g_{00}g_{11}-F^2/T_s^2\Big)\Big|_{r=r_*} = 0, \tag{52}$$

を意味するから、F と v の間に一定の関係を要求する。具体的には

$$F = vT_sg_{11}|_{r=r_*} \tag{53}$$

が要求される。ここで $g_{11}|_{r=r_*}$ 自身も、(51) を解くことで v の非自明な関数として得られる。もともと (49) における任意の積分定数であった F は、弦の配位を表す x が実数となるための条件により、その任意性が固定され、v の関数として与えられるのである。

ところで、F の物理的意味は何であろうか。この意味を理解するために、定常でない場合についての弦の運動方程式を考察してみる。時間依存性も含めた運動方程式は、$X^1=X(t,r)$ として

$$0 = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu X)} = \partial_0\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 X)} + \partial_r\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}. \tag{54}$$

両辺を r で積分すると

$$0 = \partial_0 P + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\Big|_{r=r_H}^{r=\infty}, \tag{55}$$

ただし P は x^1 方向の弦の正準運動量である。(55) から弦が受ける力は

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\Big|_{r=r_H}^{r=\infty} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\Big|_{r=\infty} - \left(-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\Big|_{r=r_H}\right), \tag{56}$$

であることがわかる。これは弦に対して時空の境界上で

$$-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\Big|_{r=\infty} \tag{57}$$

の力が加えられ、ホライズンにおいて

$$-\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r X)}\right|_{r=r_H} \tag{58}$$

の力が境界上での力と逆向きに加わっていることを意味している。ここで定常状態を仮定した (49) を採用すると (57)、(58) ともに F に等しい。（関係式 (49) は r の値に依存しないことに注意。）したがって、F は (57) の意味で境界上で外力として弦に加えられる力に等しく、かつ (58) の意味で熱浴から受ける摩擦力とも等しい。

また、弦の Hamiltonian (H) の変分を定常状態において考えてみることにしよう。定常状態のもとでは運動量も速度も一定であるから、Hamiltonian の変分は $-L$ の変分であるとみなして良いであろう。

$$\begin{aligned}\delta H=-\delta L &= -\int dr\delta\mathcal{L}=-\int dr\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\delta x' \\ &= -\int dr\left[\partial_r\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\delta x\right)-\left(\partial_r\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\right)\delta x\right] \\ &= -\int dr\left[\partial_r\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\delta x\right)\right] \\ &= -\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'}\delta x\right|_{r=r_H}^{r=\infty} \\ &= F\left(\delta x|_{r=\infty}-\delta x|_{r=r_H}\right).\end{aligned} \tag{59}$$

ただし最終行で (49) を用いた。これは境界から $F\delta x|_{r=\infty}$ の仕事が弦に流入し、ホライズンにおいて $F\delta x|_{r=r_H}$ の仕事がブラックホールに流出していることを意味する[11]。つまり、弦に対して外力のなす仕事が $F\delta x|_{r=\infty}$ であり、弦が熱浴に散逸するエネルギーが $F\delta x|_{r=r_H}$ であると解釈される。我々の解では定常状態を扱っているから、$\delta x|_{r=\infty}=\delta x|_{r=r_H}=v\delta t$（$\delta t$ は経過時間）となり、外力のなす仕事と散逸は釣り合っている。

以上のことから F は速度 v の定常状態を保つために必要な外力であり、熱浴からテスト粒子が受ける**摩擦力**であると理解される。つまり、(53) は、我々のテスト粒子が受ける摩擦力を速度の関数として与える関係式なのだ。

それでは具体的に、摩擦力 F を v の関数として求めてみよう。いま

$$g_{00} = -\frac{r^2}{L^2}\left(1-\frac{r_H^4}{r^4}\right), \tag{60}$$

$$g_{11} = \frac{r^2}{L^2}, \tag{61}$$

[11] 従って、弦の Hamiltonian からは house keeping heat は差し引かれている。

であることを用いると

$$F = vT_s \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{r_H^2}{L^2}. \tag{62}$$

さらに (40)、(41)、(42) を用いると

$$F = v \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\pi T^2 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}, \tag{63}$$

を得る。これは

- v の非線形な関数であり、
- 結合定数 λ の整数べきでは表されない非摂動的な結果、

である。F/v で摩擦係数 γ を定義すれば、この摩擦係数が

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\pi T^2 \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}, \tag{64}$$

のように v や熱浴の温度 T の関数として具体的に得られる。本稿では光速度を $c = 1$ としていることを思い出すと、粒子の速度が光速に近づくにつれて γ は増大する。

7　久保公式との整合性

以上の計算では、輸送係数である摩擦係数を線形応答理論を用いずに非線形領域まで含めて求めた。当然確認すべきは、線形応答領域における (64) の値は久保公式と整合するのかどうかである。実際、久保公式を用いて求めた輸送係数の値は (64) の値の線形極限と厳密に一致する。講義ではこの整合性についても述べる予定である。

8　非平衡定常状態の有効温度と揺動散逸関係式

講義では、6.3 章で解析した弦の、微少振動の振る舞いに言及する予定である。（筆者の仕事で関連する原論文としては [5]。）弦の微少振動の従う運動方程式は、ある曲がった時空上の Klein-Gordon 方程式となるが、得られた方程式から逆にその「曲がった時空」の計量を読み取ると、ブラックホール時空とは別の計量が得られることがわかる。

これは、非平衡定常状態であるところの、一定速度 v で牽引されるテスト粒子の微少揺らぎが従う時空は、熱浴を定義しているブラックホール時空とは異なる時空であることを意味する。依然としてその時空の Hawking 温度を計算することが可能であるが、その値（$T_{\rm eff}$ とする）は熱浴の温度とは一般に異なる。この解析から、非平衡定常状態における揺らぎが従う「有効温度 $T_{\rm eff}$」は熱浴の温度とは異なることが結論され、モデルに応じてその具体的な値が（例えば v の関数として）計算される。講義ではこの計算の詳細を述べる予定である。

9 ゲージ・重力対応を用いた非線形電気伝導の解析

ここまでは、ゲージ・重力対応を用いた Langevin 系の記述に関して、ある程度詳細に述べた。講義では、同様の計算テクニックを用いて、ゲージ理論系の非線形電気伝導度の計算、非線形領域において発現する相転移と臨界現象について触れる予定である。（基礎となる原論文は [6] である。また関連する筆者の原論文として [7, 8] を挙げておく。）

References

[1] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231 [Int. J. Theor. Phys. **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].

[2] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory," Phys. Lett. B **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109];
E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].

[3] S. W. Hawking, "Black hole explosions?" Nature 248 (No. 5443) (1974) 30.

[4] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, "Energy loss of a heavy quark moving through N = 4 supersymmetric Yang-Mills plasma," JHEP **0607** (2006) 013 [arXiv:hep-th/0605158]; S. S. Gubser, "Drag force in AdS/CFT," Phys. Rev. D **74** (2006) 126005 [arXiv:hep-th/0605182].

[5] S. Nakamura and H. Ooguri, "Out of Equilibrium Temperature from Holography," Phys. Rev. D **88** (2013) 126003 [arXiv:1309.4089 [hep-th]].

[6] A. Karch and A. O'Bannon, "Metallic AdS/CFT," JHEP **0709**, 024 (2007) [arXiv:0705.3870 [hep-th]].

[7] S. Nakamura, "Negative Differential Resistivity from Holography," Prog. Theor. Phys. **124** (2010) 1105 [arXiv:1006.4105 [hep-th]].

[8] S. Nakamura, "Nonequilibrium Phase Transitions and Nonequilibrium Critical Point from AdS/CFT," Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 120602 [arXiv:1204.1971 [hep-th]].

[9] 中村真,「ゲージ・重力対応で探る強相関系の非平衡物理学」, 日本物理学会誌 **70** No. 7 (2015) 510.

[10] 夏梅誠, （臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 93）「超弦理論の応用」, （サイエンス社, 東京 2012）.

[11] 中村真,「ホログラフィック・ゲージ理論入門 —超弦理論がつなぐ高次元重力とハドロン物理学—」, 原子核研究 **56** Suppl. 1 (2011) 3.

[12] 「新潟・山形合宿」講義録および使用スライドが、
素粒子論研究・電子版　Volume 7、項目 4「第 15 回新潟・山形合宿」:
http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/ sokened/sokendenshi/vol7/15th-niiyama-houkoku.html
の「HTML」のリンクよりダウンロード可能である。

[13] 今村洋介, 「$\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ correspondence」, 素粒子論研究 **98-6** (1999) 209.

[14] R. M. Wald, "General Relativity," *Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984).*

[15] 前田恵一, （臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 63）「重力理論講義 相対性理論と時空物理学の進展」, （サイエンス社, 東京 2008）.

[16] 福間将文, 酒谷雄峰, （臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 112）「重力とエントロピー」,（サイエンス社, 東京 2014）.

[17] J. Polchinski, "String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998)*;

J. Polchinski, "String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998).*