 物性研究・電子版 Vol. 6, No. 4, 064202 (2017年11月号)

心と脳のダイナミクス：
数理科学的理解はどこまで進んだか

津田一郎 （北海道大学理学研究院数学部門）

アブストラクト

物理学は自然現象の本質を物理法則という形で取り出し、人類の宇宙、自然に対する理解を深めるのに貢献してきた。他の自然科学もそれぞれ自然を理解する独自の方法論を提供してきた。他方、経済学・社会学は人間の行動の集合としての社会現象と社会構造を記述することで人間行動への理解を深めるという寄与をしてきた。

それでは、数学という学問は何を対象にした学問なのだろうか。20 世紀前半のいわゆる「ヒルベルトの 23 の問題」以降、数学はその内部で独自の運動を繰り返し、数学の数学による数学のための学問として独自の発展を遂げてきた。しかし、20 世紀より以前、あるいは古代ギリシャ、さらには古代エジプトまで遡りその素朴な現れを見れば、それは人々の欲求、行動を形にするための表現であったことが首肯されよう。私は一般に数学という学問は人の心、それも抽象化された普遍的な心の表現だと理解している。このような観点から、脳のダイナミクスは抽象化され普遍化された心が個々の脳という物理世界を通過するときに現れる心の痕跡であると考えるようになった。脳のダイナミクスに埋め込まれた数学を抜き出すことで、脳の発展と活動を支配する心の法則を発見することができるだろう。

本講義では、この心と脳のダイナミックな過程において脳の中に埋め込まれたはずの数学を抜き出す一つの試みを紹介する。私たちは脳を複雑系の典型と捉えてきたので、まずは複雑系科学の歴史を振り返る。次に、脳ダイナミクスのカオス力学系による理解に関して現在までに分かったことを講義する。記憶、思考・推論がどこまで数学的に理解でき、また数理モデルによる予測がどこまで実証されたかにも触れる。さらには、自己制御系としての脳と心を数学的に定式化するにはどうすればよいかについての試論を述べ、可能ならば脳の病態の解明に対する数理科学からの挑戦にも触れたい。[1]

[1]本テキストは、共立出版の書籍シリーズ「連携する数学」の１タイトル“脳のなかに数学を見る”(津田一郎　著）として執筆した原稿の一部を抜粋して使用している。本形式での使用に関して、共立出版の許可を得て転載するものである。尚、転載にあたっては本テキスト用にもとの原稿を一部書き換えた。

1 複雑系と脳科学の交差：数学の役割

1.1 リブシャベールの言明

Libchaber の言明良い定理は実験的に検証可能である。

定理を実証するとは数学者に奇異な感じを与えるかもしれない。定理は証明された命題であり、数学的には証明によってすでに "実証" されているからである。しかし、自然現象を扱う研究者にとってはこの命題はすこぶる重要な意味を持っている。実験科学においては物理学が典型的に示したように、すでに起こっている現象に現れる物理量の間の関係を理論的に導き、その現象を説明する体系を構築する。さらに、そこから帰結される新たな現象が予言され、それはまた実験によって検証される。これが実証である。物理学は理論と実験のこの関係を自然理解の根本に据えたことで成功した。しかし、このような物理学体系、あるいはそれと類似の体系によって、すべての自然現象が十分に理解されているわけではない。特に、生命現象の多くに関しては、実験による事実の集約で手一杯に見えるし、物理学のような整然とした理論構築がなされているわけではない。また、物理現象の中でも非線形効果が大きな現象や、要素間の動的な関係性が本質となって現れる現象にいたっては理論体系は出来上がっていない。このような複雑系領域においては、個々の現象固有の理論よりもむしろその現象の背景をなす普遍性の高い理論が本質を射抜くことがある。数学の普遍性が数学以外の分野に本質的に寄与する局面がここにあるのではないだろうか。リブシャベールの言明と私が呼んだ言明の意義はまさにここにあるのである。

実際、リブシャベールは Ruelle-Takens の定理 [1] を小さなシャーレの中に流体乱流を起こすことで実証した。Ruelle-Takens の定理は、それまでアトラクターとして知られていた不動点、リミットサイクル、トーラス以外のアトラクターの存在（strange attractor：奇妙なアトラクターと呼ばれた）を示したことで知られている。流体乱流の起源に関する定理である。かつて流体乱流は、ランダウ理論に縛られていた。L.D.Landau は 20 世紀最大の物理学者の一人である。ランダウは乱流は無限次元の準周期運動の初期位相にランダムネスが混入したものだと考えた [2]。無限次元の準周期運動は数学的には無限回のホップ分岐を前提としており、無限次元トーラスによって表現される。すなわち、乱流に関するランダウの描像とは、無限次元トーラスにランダムな初期位相が混入したというものだ。リュエルとターケンスはこの描像は間違いだということを証明した。彼らは、4 次元トーラスは C^∞ 級の摂動で崩壊し、strange attractor になること、つまりカオスになることを証明した。すなわち、4 次元トーラスはどんな滑らかな摂動でも無限小の摂動で壊れてしまうことが証明されたのである。さらに、3 次元トーラスは $C^r(r<4)$ 級の摂動で崩壊し、カオスになることも証明された。証明されたのだから数学的にはもはや何もする必要はない。しかし、これは数学の定理であり、流体乱流の物理理論ではないし、物理の枠組み、さらには自然科学の枠組みの中では "理論的な予言" に相当するものだ。実験物理学者としては、これは実証の対象である。リブシャベールはこの定理は良い定理であると直感し、実際に実験室で検証可能だと信じた。そこで、流体の実験系を構築し、一つのパラメーターを導入し、それを変化させるたところ、一つの周波数 ω_1 を持つリミットサイクルが分岐し、二つの無理数比の周波数、ω_1,ω_2 による 2 次元トーラスが出現した。さらに、パラメーターを変化させると、2 次元トーラスは分岐して第 3 の周波数 ω_3 が現れたが、このときパワースペクトルを観測すると、それぞれの周波数に対するスペクトルピークは広がって、もはや線スペクトルではなく連続スペクトルになることを発見したのだった。ただし、正確に言えば、この問題はまだ完全に解決されたとは言いがたい。層流から乱流への転移に関する数理モデルによる解析では、準周期運動からいきなりカオスに転移するのではなく、準周期運動が不安定化した後に周期倍分岐を経てカオスに至るという転移やトーラスのフラクタル化の方がむしろ普遍的であるという主張がある。この詳細な機構は今後に残された問題であるが、高次元トーラスは摂動に対して不安定（構造不安定）であり、カオスが一般的に観測される、という定理の内容は実証されていると考えてよい。

1.2 ダイナミックに変化する複雑系としての脳

脳は神経細胞 (ニューロン）とグリア細胞、それに未分化の神経幹細胞からなる細胞の集合体である。単なる寄せ集めではなく神経細胞は互いに化学的または電気的に結合し、巨大なネットワークを作っている。ヒトの脳の中で大脳新皮質と呼ばれる進化上最も新しい脳の部分のニューロン数はおよその見積もりで百億と言われている。地球の人口 (40 億）と同じ程度だ。小指の爪から先くらいの大きさのところに少なくとも一千万個の細胞がひしめき合っているさまが想像できるだろうか。一千万個というのは、米屋さんで買う 10 キロの米袋に入っている米粒の数のおよそ数十倍から百倍程度である。脳全体ではその 10 倍から 100 倍の数の神経細胞があると推定される。

一個一個のニューロンにはだいたい一万個程度の他のニューロンからの結合があるといわれている。つまり結合の数は大脳新皮質全体で 100 兆程度である。地球の一人一人がそれぞれ他の一万人と手をつないでいるさまを想像してほしい。一人一人は千手観音のような手をもっていると想像してもよいし、インターネットによってつながっていると考えても良いだろう。これは小指の爪くらいの大きさのところにおよそ一千億個の結合が入っていることに相当する。脳はニューロンのこういった結合システムを媒体として情報処理を行っている。グリア細胞はまた神経細胞と同じくらいに多い。

神経幹細胞は脳室の壁にあって未だニューロンになるともグリアになるとも決まっていない未分化の細胞である。大人の脳でさえ、これが脳のいろんな場所に移動してその場所でニューロンになるかグリアになるかが決定されることが最近分かって来た。特に、移動する場所として、記憶の形成に必須の場所である海馬、体性感覚を司る頭頂葉、におい情報処理を行う嗅球が現在までに知られている。おそらくはもっと多く

の場所に移動していることだろう。この細胞がニューロンの新しいネットワークの構築に一役買っているのかもしれないし、脳の修復などがそうやって行われているかもしれない。

通常、ニューロンのネットワークは結合の強さが変化したり結合の仕方が変わったりして構造を変化させている。それに加えて神経幹細胞によるニューロンの再生が起こるとネットワークの構造はダイナミックに変化するだろう。千手観音のような手による結合の仕方が情報のやり取りに応じてさまざまな時間スケールで変化している。

こういった多様に変化しうる可塑的ネットワークはヒトの脳の巨大ネットワークだけに限らない。アメフラシという海産の軟体動物のえら引っ込め反射は詳しく研究されていて、この単純な神経反射でさえもニューロンとニューロンのつなぎ目であるシナプスという部分が変化して可塑性があることが分かっている。同じ海産の軟体動物のウミウシや陸産のナメクジも条件付けで簡単な学習は行える。このとき、シナプスに変化が起きていることが分かったのである。シナプス学習はすでに軟体動物のレベルでも起こっているのである。ガ、バッタ、ハエのような昆虫の神経系は哺乳類とは違う特異な発達を遂げているが、におい情報処理の神経系は特に発達している。鳥類も哺乳類とはまったく異なる神経系の発達を成し遂げているが、カナリアなどのように毎年歌を歌うための神経組織が完全に生まれ変わるものもある。カナリアは春に歌を学習し、秋になると忘れて、さらに次の春に学習をするのである。『歌を忘れたカナリア』は本当のことだ。このとき、カナリアの脳のある部位で神経細胞の分枝が約 50 ％も増加する（体積が 50 ％増加する）ことでシナプスの数が増加して新しい歌を歌えるようになる。

このように、異なる生物種ではその行動の多様性に応じて異なる神経系が発達し、それに応じた学習が可能になっている。一般に、脳の大きさは体重に比例するので、その大きさそのものは学習能力の高さを表すわけではない。体重に対する脳重の比は、鳥類と哺乳類が他の動物に比べて大きい。さらに、哺乳類の中でも霊長類は大脳新皮質と小脳が特に発達している。しかし、その中のチンパンジーとヒトの脳では脳重比もそれほど違うわけではないし構造的にもそれほど大きな違いがあるようにも見えない。さらには遺伝子も約 1.5 ％程度しか違わないと言われている。では一体何が、学習や記憶、知覚、判断などの機能の違いを生み出すのだろうか。逆にまた、ヒトの脳と昆虫の嗅覚系に共通する”脳の原理”とはなんだろうか。つまり、構造的に類似したものが機能的に大きな違いを生み出すとしたら、何が異なるのだろうか。また、さまざまな種の脳神経系に通底している原理はあるのか。あるとすればそれは何か。これらの問いは一朝一夕に答えられる問いではない。しかし、現代の脳科学はこれらの問いに答えるべく発展している。概観したように、脳は構成要素が他者や環境との関係の中で個々の脳機能に意味が生じるように構造が変化するような複雑系である。このような複雑系としての脳の機能に関する数学理論はありうるだろうか。あるとするならば、それはどのようなものだろうか。このような意味での複雑な脳と心の関係は何か [3, 4]。次節では複雑系研究の流れの中で数学が果たしてきた、あるいは果たすべき役目について考える。

1.3 複雑系研究の流れと数学

複雑系と呼ばれるシステムの研究の歴史はそれほど短いものではない。我々は生命こそが複雑系だと考えている [5] のに対して、例えば、認知科学者で経済学者のハーバート・サイモンは「人間が作った人工システム全てが複雑系だ」と考えている。しかし、サイモンが行った複雑系研究の歴史の概観は、複雑系の本質論とその流れの中でのカオス研究の位置づけをはっきりと見せてくれるので、サイモンの著作 [6] を参考にして、まずは複雑系研究の歴史を概観しておこう。

複雑系研究は三期からなっている。まず第一期では、第一次大戦後にヨーロッパで起こったゲシュタルト心理学が代表的な複雑系研究として挙げられる。物事を理解するという局面において、部分に分割したうえで部分に還元して理解するのではなく、全体を全体として理解しようという考え方で心理学の研究が進められた。第一期の複雑性の特徴は全体性、連続性にあると言えるだろう。

第二期では、第二次大戦後にアメリカ合衆国で起こったサイバネティックスの運動が典型的なものとして挙げられる。サイバネティックスは諸科学をつなぐ新しい科学であり、提唱者のノーバート・ウィーナーは複雑で予測が難しい時系列の解析を行う数学理論を打ち立ててサイバネティックスの骨組みを作った。そこでは、予測、フィードバックという概念が主要な概念として提案された。脳生理学者のマッカロと数学者のピッツが共同研究を行い、0 と 1 の二状態からなるニューロン（神経細胞）のモデルが提案された。0 はニューロンが何も出力を出さない静止状態であり、1 はニューロンがスパイクを出している状態で発火状態という。このモデルは今日でもマッカロ・ピッツの形式ニューロンとしてよく知られている。重要なことは、この形式ニューロンで適当なネットワークを構成すれば、それはアルゴリズムでかけるものなら何でも計算可能な万能チューリングマシンと等価なものになるということを彼らが証明したことである。今のデジタル計算機は万能チューリングマシンの一種である。つまり、脳をある側面で見ると、万能チューリングマシンと見ることも可能だという主張だ。第二期の複雑性の特徴は予測と普遍性にあると言ってよいだろう。

第三期は 1980 年以降であり、非線形・非平衡系の研究に代表される。イリア・プリゴジンは散逸構造論を打ち立てた。ヘルマン・ハーケンはサイバネティックスの流れを汲むシナジェティックスという学問を提唱した。これは諸科学をその共通普遍項としての相転移という概念でつなげてみようという試みである。この非平衡系の状態変化は、物理学に限らず、広く自然現象一般、さらには社会経済現象にいたるまで幅広く認められるからである。このような物理学に限定されない非平衡一般の状態変化は数学的に定式化されていて、分岐現象と呼ばれるようになった。

カオス（分子がランダムに衝突する分子カオスと対比して巨視的カオスともいう）は非平衡状態の分岐現象に表れる状態の一つであり、物質全体のマクロな性質の一つを現している。このマクロな性質は系の振る舞いの平均化方程式の解によって説明できる。平均化方程式は確率的要素を含まない決定論的な方程式である。しかし、この決定論的な方程式の解の中には非周期的で予測不可能な振る舞いをする解があり、それは力学系のカオスと呼ばれている。カオスは数学的なある構造を持っている。それは、多くの場合非整

数次元で特徴付けられるフラクタル的な構造として知られている。フラクタルはカオスの幾何学的な構造に現れるだけではなく、もっと広くさまざまな臨界現象や確率過程にも現れる。このようにフラクタル自身はアルゴリズムが純粋に決定論的でも、また (サイコロを振るというような) 確率要素を含んでいても、生成されうるのである。しかし、第三期においては、ものの考え方として、確率現象も決定論的な力学から生成されうるという点が強調されたのである。このように、第三期の複雑系研究の特徴は決定論的な不確実性にあるといって良いだろう。

1.4 複雑現象の数理的方法

従来、数学的方法は１９世紀中葉以降 exact（正確）から rigorous(厳密）へと発展し、rigorous 性を証明によって獲得した。さらに、２０世紀末になり、非線形方程式の厳密解を求めることを通じて exact 性が数学的方法の要素として復興した。また、ちょうどそのころから、コンピューターを使って数値解析を行い、それを補助として証明していく実験数学という方法が起こった。それによって、true（真実）性や plausible（もっともな確からしさ）性が数学的方法として加わった。自然科学では現象を説明する理論が作られ、記述力だけでなく、予測力を持つものが良い理論だと認識される。理論の正しさを与えるのは実験であり、実験によって理論は実証される。してみれば、数学における証明は自然科学の実験に対応していると言った方が正確だろう。”実験数学 ”という言い方はこの意味で少し抵抗があるはずだ。むしろ、”理論数学 ”というべきもののように見える。このことを踏まえたうえで、複雑系の数理的方法の本質は次のように要約できるだろう。

1. 複雑な現象から数理構造を抽出する。
2. 現象の数理モデルを構築し、モデルのコンピューターによる数値解析を行うとともに、コンピューター実験を通してのモデルの構成を行う。

ここで、数理モデルは個別現象の理解のために構成され、コンピューター実験によるモデル構成はより普遍的な理解のために行われる。前者では、数値計算、数値の集合の幾何学的表現と統計的表現が対象であり、後者では解釈学的な構成論が求められる。

複雑現象の特徴を列挙しておこう。

（1）厳密解が得られるような簡単な系への還元が困難である。
（2）多数の要素系が相互作用して動的挙動を示す。
（3）反直観的な事象が含まれることが多い。この場合は方法において数学的な厳密さ（rigorous）は不可欠である。
（4）未来の挙動の決定論的予測が困難である。

ここで、基本的な問題提起をしよう。

基本問題

実験的な観測から系の挙動に関する有用な情報を如何に抜き出すか。

この命題はまさに最初に掲げたリブシャベールの命題へと繋がっている。この問いにカオス力学系の立場から答えるために、いくつかの概念を明確にしておこう。

定義：時系列

時系列とは系の一つあるいは複数の観測量（定義はすぐ下に記す）を固定した時間間隔でモニターした時、その時間発展を表すデータ列である。

この時系列の定義を使って、現象の時間発展に関するモデル化を次のように定式化する。

m 次元ユークリッド空間の点として初期データ $X(0) \in R^m$ が与えられたとする。発展方程式は $t \in R$ を時間として、

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t)). \tag{1}$$

と書けるが、この発展方程式が現象の発展をモデル化する。ただし、X は系の状態を記述する観測量の集合を表し、f はこれら観測量の非線形の時間発展を決定する微分可能関数であり、一般に $C^r (r \geq 1)$ である。

定義：観測量

観測量とは微分可能関数 $g : R^m \to R$ のことである。

定義：実験

実験とは、$G(t) \equiv g(X(t))$ と $x(0) \in R^m$ を設定する操作である。

一般に、実験の目的は $G(t)$ から物理的なリアリティーを抜き出すことであるが、非線形力学系もしくはカオス力学系においては数学的なリアリティーをも抜き出すことが求められる。現象には過渡現象と漸近挙動があり、後者はアトラクター上での挙動に対応する。ここで、一般的なアトラクターの定義を与えておく。ただし、後に述べるように、アトラクターの概念には様々な見方があり、それぞれに定義が異なることを注意しておく。

定義：アトラクター（幾何的な意味での）
相空間 Ω の部分集合 A と $A \subset N \subset \Omega$ を満たす近傍 N、微分同相写像 ϕ に対して、$\phi(N) \subset N$ であり、かつ

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \phi^n(N) = A \tag{2}$$

であるとき、A を幾何学的な意味でアトラクターという。通常、アトラクターというときはこの意味で使う。なお、N を A の捕捉領域という。

アトラクターには、不動点（点アトラクター）、極限周期解（リミットサイクル、周期アトラクター）、トーラス（概周期アトラクター）、ストレンジアトラクター（カオスアトラクター）などがある。

こういった幾何学的な分類が未解決であるような、非常に複雑な挙動やカオスの統計的な性質を議論する場合は、統計力学的、あるいは確率解析的な取り扱いを行う方がより本質に迫れることがある。その場合は、不変測度に着目する。

例えば、物理量 $X(t)$ に関する実験データに対して経験的な長時間平均を次のように定義する。

定義：長時間平均
ほとんどすべての初期値と積分可能関数 $g(X)$ に対して、その長時間平均を次で定義する。

$$< g >_t \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X(t))dt. \tag{3}$$

さらに、不変確率測度 ρ と積分可能関数 $g(X)$ に対して、次の相平均が定義される。

定義：相平均

$$\rho(g) \equiv \int \rho(dX)g(X). \tag{4}$$

これに対して、次のバーコフの定理が成り立つ。

定理 **(Birkhoff 1931)**
ほとんどすべての初期値と不変確率測度 ρ に対して、

$$\int < g >_t d\rho = \int g(X)d\rho. \tag{5}$$

定義：エルゴード仮説

$$< g >_t = \int g(X)d\rho \tag{6}$$

を主張する仮説をエルゴード仮説という。

定義：エルゴード問題
長時間平均を相平均で置き換えることに理論的根拠を与える問題をエルゴード問題という [7]。

エルゴードという用語は仕事と径路を意味するギリシャ語の複合語であり、熱力学を分子レベルから正当化する統計力学の基礎を与える概念としてボルツマンによって導入された。分子の総数を N として、各分子の位置座標と速度座標の組 $p_i \equiv (x, y, z, v_x, v_y, v_z)_i$ を一点として表す $6N$ 次元超空間を考える。全エネルギー一定の要請のもとで、運動は $6N-1$ 次元の超曲面 S_E の上で起こる。ボルツマンが考えたエルゴード性は「十分長い時間の後には代表点は S_E 上のすべての場所をもれなく一様に訪れる」というものだった。これが成り立てば、分子集団の p_i の関数である任意の物理量（オブザーバブル）g について長時間平均を取る代わりに g を超曲面の上の関数とみて、その値を超曲面上で平均しても同じである。そこで、バーコフはボルツマンの「もれなく訪れる」を測度的分解不可能性で定式化した。これによるとエルゴード性は次のように定義される。

定義：エルゴード性
不変確率測度 ρ がそれぞれ不変確率測度である ρ_1 と ρ_2 に分解できないこと、すなわち $\rho = \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2, \alpha \neq 0, 1$ が成立しないことをエルゴード性があるという。

複雑系においてはしばしばエルゴード性がないような系を問題にしなければならない。また、仮にエルゴード性が成り立つような系であっても不変測度を求めることが困難である場合が多々出現する。ただし、どのような場合でもエルゴード性は物理学や数理物理学の基礎的概念であるので、押さえておかなければならない。脳のような生命現象では、得られたデータがまずエルゴード的なのかどうかを検証した上で、次のステップに進むべきである。そうでないとデータの統計処理に信頼性がおけなくなるからである。カオス力学系もエルゴード性が成り立つ場合とそうでない場合があることは注意しなければならない。

さて、以上のような複雑系に、特にそのダイナミックな様相にカオスがどのようにかかわってくるだろうか。それを見るために次のような作業仮説を置く。

作業仮説

カオスの動的な構造は脳の複雑系を作り上げるのに必要な要素を提供する。すなわち、カオスは脳の複雑系の背後にある数学的な構造を支えている。

2 力学系ミニマル

力学系は物理学の二つの学問分野の流れを汲んでいる。一つは、古典力学に端を発し、もっと一般の微分方程式や差分方程式で表現される系の運動の幾何学的性質を明らかにするために創始された。もう一つは、多数の分子が互いに相互作用している系の物理的性質を扱う統計力学の基礎であるエルゴード問題を定式化するために系の測度論的な性質を明らかにすることを目的にして創始された。カオス力学系によってこの両者は融合することになる。ここでは位相力学系に着目し、それを扱う。測度を問題にするときは、相空間の他に確率空間も考慮することになるが、本書では測度論的な議論はしないで、位相的な議論に終始することにする。ここでは力学系と言えば位相力学系のことだと考えてほしい [8]。

力学系は空間 Ω とその上に作用する群作用 ϕ_t の組で定義される。すなわち、(Ω, ϕ_t) で力学系を定義する。この力学系が定義される空間を相空間と呼ぶ。Ω 上の点 x_t と相空間の外の実数 $\mathbf{R}$ 上の点 t を対応付ける。$x_0 \in \Omega$ と $t = 0 \in R$ を対応付けることは、初期条件を与えることである。$\phi_t(x_0) = x_t$ のように、相空間上の点は変化していく。$\phi_0 = I$ は恒等作用素であり、$\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_s(\phi_t(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$ が成り立つ。すなわち、群作用は $t > 0$ ならば半群であり、$-\infty < t < \infty$ ならば群である。数学的には t は単にパラメーターであるが、物理学では多くの場合 t は時間を意味する。t が上のように実数の場合は微分方程式が力学系のモデルを与える。この場合は ϕ_t は積分 (発展方程式の解）であり、系の流れを定義し、$\{\phi_t\}_t$ は軌道を与える。t を整数上に制限すれば、力学系のモデルは差分方程式、あるいは写像（の繰り返し）である。力学系が微分方程式で与えられる場合、X を一般にベクトルとして、相空間上の軌道の発展法則は $dX/dt = F(X)$ で与えられる。この時、右辺は相空間上の点 X に速度ベクトル $F(X)$ が対応したものと見なせるので、ベクトルによって構成された場と見なすことができる。それゆえに、微分方程式で表現される力学系をベクトル場と呼ぶことがある。以下に、簡単な力学系の例を示そう。

1．マルサスの方程式
$\Omega = R,\ \frac{dx}{dt} = ax.$

$t \in R$ であり、対応する流れは $\phi_t(x_0) = x_0 \exp(at)$ である。これは上の微分方程式の初期値 x_0 に対する解を表現する。この作用素は、$\phi_t(x_0 + x_1) = \phi_t(x_0) + \phi_t(x_1)$ と $\phi_t(cx_0) = c\phi_t(x_0)$ を満たすので、線形作用素であり、$\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0))$ の可換性と推移性を満たし、通常は $t > 0$ で考えるので半群である。ただし、$-\infty < t < \infty$ ならば群である。

2．ロジスティック方程式（あるいはフェルフルスト（Verhulst）方程式）
$\Omega = R,\ \frac{dx}{dt} = ax - bx^2,\ a > 0.$

$t \in R$ であり、対応する流れは $\phi_t(x_0) = a(b + C\exp(-at))$。ただし、$C = \frac{a}{x_0} - b$ である。この作用素は明らかに線形ではない半群である。

3．ロジスティック写像
$\Omega = [0, 1],\ x_{n+1} = ax_n(1 - x_n).$

$n \in N$ であり、$\phi(x) = ax(1 - x)$。$n = 0$ で $\phi^n(x) = x$ であり、$n \geq 1$ で $\phi^n = \phi(\phi^{n-1})$ である。よく知られているように、この写像は、パラメーター a が増加するに従い、安定不動点が分岐し、周期倍分岐を経てカオスに至る。さらに、パラメーター空間でのカオスの存在領域に周期解の窓が現れ、接線型分岐を介して間欠性カオスを生み出す。その構造は大変複雑であるが、分岐の秩序構造も知られている。$a > 4$ では相空間内の不変集合はカントル集合になる。

ここで、カントル集合とは次のような集合のことである。

定義：カントル集合

カントル集合とは次の三つの性質を持つ集合のことである。

1．閉集合、2．完全不連結、3．完全

ここで、完全不連結とは集合が空集合と 1 点集合以外に連結部分集合がないことを言う。したがって、点集合でかつ線分を持たないことを言う。また、完全集合とは孤立点を持たない閉集合のことであり、したがって、集合内の任意の要素は他の要素からなる点列の集積点である。

次に力学系の重要な概念であり、本書の脳のダイナミクスでも現在注目されているアトラクターの定義を採録する（式 (2) 参照)。

定義：アトラクター（幾何的な意味での）

$M \subset N \subset \Omega$ に対して、$\phi_t(N) \subset N$ なる集合 N を M の捕捉領域という。$\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} \phi_i(N) = M$ であるような M をこの力学系の（幾何的な意味での）アトラクターという。

また次の概念は後々重要になる。

定義：ω 極限点

点 y が写像 f に対する x の ω 極限点であるとは、$\lim_{k\to\infty} d(f^{n_k}(x), y) = 0$ （ただし、$k \to \infty$ のとき $n_k \to \infty$）となるような数列 $\{n_k\}$ が存在することである。ここで、d は距離を表す。

定義：ω 極限集合

ω 極限点の集合を ω 極限集合という。

3 天気予報のカオス–ロレンツカオスをめぐって

カオスはアンリ・ポアンカレの制限三体問題の解の一つとして科学的に認識された [12] が、「カオスという命名は後のリー・ヨークの定理 [13] によって行われた。まず最初に呼び方（名前の綴り方）に関する注意を与える。Lorenz はロレンツという発音に近いようである（直接、本人に確認したことがある)。しかし、わが国ではローレンツと綴ること、またそのように発音することが慣習になっている。これはローレンツ変換、ローレンツ力、ゼーマン効果の発見者の一人で有名なオランダの物理学者ヘンドリック・ローレンツの影響が大きいことによると思われる。こちらは Lorentz である。また、刷り込みで有名なオーストリアの動物行動学者コンラート・ローレンツの綴りはカオスのロレンツと同じく Lorenz であるが、わが国ではローレンツと綴ることが一般になっている。このようなことからも、カオスのロレンツもローレンツと綴るようになったと思われる。難しいのは、綴り Lorenz も Lorentz もともにロレンツ、ローレンツと両方に発音されることがあることであり、ルールがないようにも見えることである。しかしながら、カオスの Lorenz は本人がロレンツと発音していたので、ロレンツと綴るべきだと思う。

マサチューセッツ工科大学のエドワード・ノートン・ロレンツは、なぜ天気予報が困難かという問いの本質を研究した気象学者である。彼の論文 “*Deterministic Nonperiodic Flow*” [9] はカオス力学系の入門の教科書としても使えるほど決定論的なカオスの本質を射抜いたものである。

レイリー・ベナール対流は現実の大気の運動の良いモデルになることは、次のような大気の状態を考えると理解できる。地球表面に太陽光線が入ってくると、太陽光線によって地表面は温められる。上空の大気は地表面近くの大気ほどは温められないので、大気の下層と上層で温度差が生じる。温度差が小さい時と大きい時では質の違う現象が起こる。温度差が小さいときは、熱伝導というものが主流になる。互いに接した二つの層を大気中に考えると、温度の高い方の空気の分子は低い方の空気の分子に比べて活発に運動する。活発な分子がそれほどでもない分子に衝突すると、エネルギーが受け渡され、不活発だった分子が活発になる。このようにして分子の運動エネルギーが下から上に伝わっていく。これが熱伝導という現象である。これにより、太陽からもらったエネルギーが徐々に下層から上層の大気へと伝えられていくのである。さらに温度差が大きくなってくると、分子間の衝突によるエネルギーの受け渡しではなく大気が巨視的に集団で運動しエネルギーを伝えていく。その大雑把な機構は次のようである。地表面近くの大気は温められ膨張する。膨張した大気は浮力を受けて上昇する。上空に達するとそこは温度が低いために大気は収縮し、相対的に重くなった大気の塊が下方へ向かって運動する。こうやって大気の大きな循環が起きる。これが熱対流である。熱対流による大規模なエネルギーの移動が起こるのである。こう見てくると、まさに大気の運動はレイリー・ベナール系でうまくモデル化できそうである。ロレンツはこのような観察の下に、3 次元非線形常微分方程式の解の予測不可能な振る舞いが実際の大気運動をうまく表しており、それゆえに天気予報は当たらないのだと結論付けたのだった。ロレンツ方程式は次式で与えられる。

ロレンツ方程式

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + rx - xz, \tag{8}$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy. \tag{9}$$

ここで、σ と r は流体の性質をあらわすパラメーターであり、b は考えている流体系のスケールを表すパラメーターである。x, y, z の三つの変数の時間 t による微分はこれら三変数の時間発展を与える。この時間発展は式の右辺のように三変数の関数で与えられている。式の右辺が三変数の間の掛け算を含む（実際、

二箇所に掛け算がある）のでこの微分方程式は非線形方程式である。この非線形微分方程式は熱による流体の巨視的な運動を表している。上で述べたように、この三つの変数は熱対流という流体運動を表す三つのフーリエ成分である。x は対流の速度に関するフーリエ成分であり、y は温度勾配に関するフーリエ成分であり、z は鉛直方向の一様な温度勾配からのずれ、すなわち熱伝導からのずれであり対流によって熱が運ばれることに関するフーリエ成分である。ロレンツは実際の大気の物理量から $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ と定め、この値のときの x, y, z の時間変化を数値的に求めた。

このロレンツ方程式の解軌道には美しい構造がある。解軌道の集合体はアトラクターを構成する。ロレンツ方程式から生み出されるランダムで長時間の予測ができない運動は決定論的なカオスであると考えられる。実際このことは 1995 年に厳密な数値計算の助けを借りてタッカーによって証明された。

4 非整数次元

4.1 次元の測り方：ハウスドルフ次元の考え方

定義：集合の次元（直観的な定義）
集合の次元とはその集合を有限の大きさとして測ることができる物差しの次元である。

次に、集合の次元の厳密な定義を与えよう。これはハウスドルフ次元として知られているものである。まず、最初にコルモゴロフ次元（容量）と呼ばれているものを定義する。集合 A を半径 r の開小球で被覆することを考える。完全に覆うのに必要な最小の小球の個数を $N(r, A)$ としよう。このとき、コルモゴロフ次元は次のように定義される。

定義：コルモゴロフ次元

$$D_K(A) = \lim_{r\to 0}\sup_{\sigma}\frac{\log N(r,A)}{\log\frac{1}{r}}. \tag{10}$$

ただし、ここで σ は被覆を意味する。r は小球の半径である。この被覆では開小球の半径は一定であった。ある一定の半径以下の開小球で集合を被覆することで、コルモゴロフ次元を一般化しよう。まず、ハウスドルフ測度を次のように定義する。

定義：ハウスドルフ測度
集合 A を半径 $r_k \le r$ の開小球で被覆することを考える。すなわち、被覆は $\sigma = \{\sigma_k : r_k \le r\}$ で与えられる。ハウスドルフ測度は次で定義される。

$$m^{\alpha}(A) = \lim_{r\to 0}\inf_{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}(r_k)^{\alpha} \tag{11}$$

これを使って次元を定義する。

定義：ハウスドルフ次元

$$D_H(A) = \sup\{\alpha : m^{\alpha}(A) = +\infty\} = \inf\{\alpha : m^{\alpha}(A) = 0\}. \tag{12}$$

この定義は、上で直感的に与えた定義を精密にしたものである。定義より、ハウスドルフ次元は$+\infty$, 0, ある有限値、のいずれかを取る。むろん、我々は有限値が得られると期待するのだが。

上の二つの次元の関係は次のようになることが証明されている。

定理：ハウスドルフ次元とコルモゴロフ次元の関係
全てのコンパクトな集合 A に対して、

$$D_H(A) \le D_K(A) \tag{13}$$

が成り立つ。

ハウスドルフ次元が威力を発揮するのは非整数次元に対してである。この意味で、ハウスドルフ次元は通常の自然数の次元の一般化であり、歴史的には特にルベーグ測度がゼロの特異な集合を特徴づける量として次元論の中で定式化された。集合に自己相似性があるときには、次元は簡単な表現を持つ。半径 r の解像度で見たときに N 個の要素からなる集合 A を考える。集合 A は自己相似性を有しているので、測定のサイズを a^{-1} $(a > 1)$ 倍すると、要素の個数は b $(b > 1)$ 倍になる。このように測っても、集合 A の大きさ自体は変化しない。従って、集合 A の次元を D_F とすると、$Nr^{D_F} = bN(ra^{-1})^{D_F}$ が成り立つ [10]。これより、

定義：フラクタル次元（Mandelbrot） [10]

$$D_F = \frac{\log b}{\log a} \tag{14}$$

を得る。

最後にもう一つ次元を紹介しよう。それはリアプノフ次元として知られているものである。この次元はリアプノフ指数の組をもとにして定義されるので、ここでリアプノフ指数の一般的な定義を与えておこう。。

定義：リアプノフ指数

$C^r(r \geq 1)$ ベクトル場 $\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^n$ に対して、線形化方程式は $\frac{d\xi}{dt} = Df(x))\xi, \xi \in R^n$ で与えられる。解の基本行列を $\Xi(t)$ とすると、x_0 を通る軌道に沿う e 方向への拡大係数は、

$$\chi_t(x_0, e) \equiv \sqrt{\frac{< \Xi(t)e, \Xi(t)e >}{< e, e >}} \tag{15}$$

で与えられる。ここで、$< * >$ は内積を表す。このとき、x_0 を通る軌道に沿う e 方向のリアプノフ指数は

$$\lambda(x_0, e) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln \chi_t(x_0, e)}{t} \tag{16}$$

で定義される。

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R^n の正規直交基底として、$\sum_{i=1}^n \chi_t(x_0, e_i) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log|\det \Xi(t)|}{t}$ が成り立つならば、$\lambda(x_0, e) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \chi_t(x_0,e)}{t}$ は任意のベクトル e に対して存在し、有限の値となる。さらに、リアプノフ指数は任意の不変確率測度に関してほとんどいたる点で存在する。もし f がエルゴード性を持つならば、リアプノフ指数は x_0 に依存しない定数となる。

以上の定式化に従ってリアプノフ指数を計算しようとしても、実際はうまく計算できない。なぜなら、すべてのベクトルは軌道が最も拡大する方向に漸近していくので、単に十分大きな時間を取るだけでは最大リアプノフ指数しか得られないからである。そこで、実際の数値計算も考慮したうえで、リアプノフ指数の定式化を行いたい。実は Oseledec の乗法的エルゴード定理では、すでにこのことは保証されている。この定理をここで説明しておこう。

E_i を正規直交ベクトルからなる行列とし、R_i を上三角行列とする。計算の時間ステップとして t を離散的な時間とする。線形化方程式はヤコビ行列を J_t として、

$$\Delta x(t+1) = J_t \Delta x(t) \tag{17}$$

と書ける。U_0 を $n \times n$ の単位行列とする。また、各単位ベクトルを縦ベクトルとして $u_0^{(i)}$ で表す。

$$U_1 \equiv J_0(u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n)} = (u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(n)}). \tag{18}$$

J_0 を QR 分解する。すなわち、

$$J_0 = E_1 R_1. \tag{19}$$

これを続けると、

$$J^{(t)} \equiv J_{t-1} \cdots J_0 = E_t R_t \cdots R_1 \tag{20}$$

となる。次の定理を得る。

乗法的エルゴード定理 (Oseledec)

$\Lambda \equiv lim_{t\to\infty}(J^{(t)} * J^{(t)})^{1/2t}$ が存在する。ここで、$J^{(t)}*$ は $J^{(t)}$ の転置行列である。

Λ の固有値を大きさの順に並べたとき i 番目の固有値を λ_i とし、u を λ_i に属する固有ベクトルとすると、

$$lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \, log\|J^{(t)}u\| = \lambda_i. \tag{21}$$

ただし、$\|x\|$ はベクトル x の大きさを表す。

このとき、λ_i を i 番目のリアプノフ指数という。なお、$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ をリアプノフスペクトルという。

定義：リアプノフ次元（Kaplan–Yorke） $C^r(r \geq 1)$ ベクトル場 $\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^n$ に対して、n 個のリアプノフ指数の組を値の大きい方から順に並べてリアプノフスペクトル $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ が存在するとする。ここで、λ_i はリアプノフ指数が初期値に依存しないと仮定して $\lambda(e_i)$ を略して書いた。この時、$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i > 0$ を満たす最大の j を m とすると、リアプノフ次元は

$$D_L = m + \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{|\lambda_{m+1}|} \tag{22}$$

で与えられる。

4.2 カントル集合のダイナミクスによる作り方ースメイルの馬蹄形写像

ここで馬蹄形写像 [11] を説明しよう。カオスの機構の本質はここに隠されている。3 次元の球の表面は 2 次元であるが、この 2 次元の球面から 2 次元の球面への写像を考える。ただし、写像は微分可能写像でその意味で滑らかなものとする。逆写像も存在するとしよう。すなわち微分同相写像を考える。2 次元球面はまた 2 次元平面に無限遠点 $\{\infty\}$ を加えたものであるので、トラックと無限遠点を考えておく。トラックは長方形領域と二つの半円盤から成り立っている。写像は次のような性質を持つものとする。

1. 無限遠点の近傍の点はトラックに向かって流れ込んでくる。
2. トラック内の点の変換は、二つの横長の短冊が一回の変換でそれぞれ縦長の短冊に写るようなものである。

すなわち、トラックは横に縮められ、縦に引き伸ばされて、馬蹄形に折り曲げられる。こうしてできた馬蹄がもとのトラックの中にすっぽりと納まるように、かつ条件 2 を満たすように写像されるのである。このように、トラックの面積は写像のたびに一定の割合で減少していく。そして、ついには面積がゼロの、のたくったひも状の構造物が出来上がる。ひも状のものは 1 次元ではなく 1 次元より少し大きいフラクタル次元を持つ。さらに次のことが分かる。トラックの下の半円盤は下の半円盤の中に縮小して写されるので、ブラウアーの不動点定理より、この下半円盤内に不動点 x^* が一つ存在する。この不動点はシンク、つまりアトラクターである。トラックの上半円盤は一回の写像で下の半円盤に写るので、最終的には上半円盤内の全ての点は下半円盤内のシンク x^* に吸引される。実はこの写像にはもう一種類の不動点がある。無限遠点である。ただし、無限遠点はアトラクターではなくリペラーである。これらは上の馬蹄形写像の不変集合でもある。もうひとつ不変集合があって、それが、カオス的な挙動を引き起こすのである。

トラックが変換されて馬蹄形がのたくって行くが、上下の半円盤内にいったん入った部分は x^* に吸引されていく。したがって、トラック領域の中で決して上下の半円盤には入らない部分にカオス運動の鍵が隠されている。少し注意深く観察すると分かるように、真ん中の長方形部分は一回の写像で縦長の二本の短冊に写される。二回目の写像では縦長の四本の短冊に写される。一般に、n 回の写像では 2^n 本の縦長の短冊ができる。これらの短冊の間には隙間が開いており、無限回の写像の後には、横方向に前に説明したカントル集合が出来上がるのである。変換によってこれ以上変化しない不変集合は縦方向に 1 次元、横方向にフラクタル次元を持つ集合である。

逆写像に関しても同様であるが縦と横が逆になる。今度は横方向に 1 次元、縦方向にフラクタル次元を持つ集合が逆変換に対する不変集合である。写像の順方向にも不変で逆方向にも不変な集合が馬蹄形写像の真の不変集合である。これは今作った二つの不変集合の共通部分として作ることができる。つまり、縦方向にも横方向にもカントル集合であるような集合である。この不変集合を Λ と書こう。Λ 上の点は変換と共に、Λ 上の他の点へと写っていくが、その動きは極めてランダムである。さらに、互いに近い Λ 上の二点が写像と共にどのように離れていくかを計算することができて、写像回数に対する指数関数で二つの軌道は離れていくという軌道不安定性を持っていることも分かるのである。このように、不変集合 Λ 上の点の運動はカオス運動になるのである。

運動がどのような意味でカオス的になるかを示すためには、馬蹄形写像と 1 対 1 の対応がある、すなわち位相同相写像で移れる記号力学系のシフト写像を導入するとよい。

まず、0 と 1 から成る集合 $S = \{0, 1\}$ を考え、0 と 1 から成る両側無限列の集合 $\Sigma = \{s | s = \{\cdots s_{-n} \cdots .s_0 \cdots s_n \cdots\}, s_i \in S \forall i\}$ をシフト写像が作用する空間とする。Σ 上にある距離を導入し構造を入れる。$s = \{\cdots s_{-n} \cdots .s_0 \cdots s_n \cdots\} \in \Sigma$, $s' = \{\cdots s_{-n'} \cdots .s_0 \cdots s_{n'} \cdots\} \in \Sigma$ に対して、例えば距離 $d(s, s') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}}, \delta_i = 0(s_i = s'_i), \delta_i = 1(s_i \neq s'_i)$ を導入する。シフト写像を次で定義する。

定義：シフト写像

$$\sigma : \Sigma \to \Sigma, \tag{23}$$
$$\sigma(s)_i = s_{i+1}. \tag{24}$$

このシフト写像の不動点は次の二つである。$s = \{\cdots 0.0 \cdots\} \equiv \{\overline{0.0}\}$, $s = \{\cdots 1.1 \cdots\} \equiv \{\overline{1.1}\}$。周期軌道も存在して、例えば 2 周期軌道は $\overline{10.10}, \overline{01.01}$ である。

次の定理が成り立つ。
定理：周期軌道
σ はすべての可能な周期の周期軌道を可算個持つ。
定理：非周期軌道
σ は非可算無限個の非周期軌道を持つ。

これらの定理の証明は簡単で、実数との対応によって証明できる。さらに、つぎのような自分自身に漸近する稠密な軌道の存在を直接このような軌道を構成することで証明することができる（証明は省く）。

定理：稠密軌道
$\forall s' \in \Sigma, \forall \epsilon > 0$ に対して、$d(\sigma^n(s), s') < \epsilon$ となる n と s が存在する。すなわち、Σ 内で稠密な $s \in \Sigma$ が存在する。

このように、馬蹄形写像によってカオス的な軌道が生成される。

4.3 擬軌道追跡性

カオスの専門書や専門的な紹介記事は別にして [2]、一般書ではほとんど触れられたことがないひとつの重要な概念がある。この概念はカオス軌道を理解するのに有用であると思われるのでここで述べることにしよう。それは、「擬軌道追跡性」という概念である。
擬軌道追跡性の定義は以下である。

h をコンパクト空間 M 上の連続写像としよう。$x \in M$ に対して、$\{h^{(i)}(x)\}_i$ は M 上の軌道を表す。観測された軌道を $\{y_i\}_i$ としよう。

定義：α-擬軌道
任意の i に対して、$h(y_{i-1})$ が y_i の α-近傍にあるような α が存在するならば、この観測された軌道 $\{y_i\}_i$ を α-擬軌道と呼ぶ。

定義：β-追跡
ある $x \in M$ に対して、任意の n で $h^{(n)}(x)$ が y_n の β-近傍にあるような $\beta > 0$ が存在するならば、擬軌道 $\{y_i\}_i$ は x によって、β-追跡されるという。

定義：擬軌道追跡性
β が存在して、任意の α-擬軌道が β-追跡されるならば、力学系 (h, M) は擬軌道追跡性を持つという。

この性質を持つ力学系の軌道はいろんな意味で性質が良い。例えば、ある誤差の範囲内で “正しく” 計算される。また、“正しく” 観測される。つまり、軌道はきちんと追跡されるのである。他方で、この性質を持たない軌道は追跡できない。ロジスティックカオスは擬軌道追跡性が破れている例になっている。正のリアプノフ指数の存在（軌道不安定性）によって誤差が拡大されるから軌道が追跡できないと言うことではない。正のリアプノフ指数が存在する場合誤差が指数関数的に拡大される。しかし、いくら指数関数で拡大しても、軌道が十分良く近似されるならば問題はない。つまり、常に真の解の近傍に計算した点があるようにできれば、計算は ” 正しく ” 行われたと言ってよいだろう。

5 脳活動のダイナミクスとカオス遍歴

5.1 脳におけるカオス理論の意義

大脳新皮質は機能的に異なる領域 (機能モジュール）から成り立っていると考えられている。この考えに従えば、ある番号の領域は一つの特化した機能を受け持ち、このような 50 個余りの特化した機能の組み合わせによって脳の高次機能が営まれているということになる。大事なことは、機能モジュールは脳の発達の初期から出来上がっているわけではなく、“適切な” 情報の入力に伴って構築されてくるということである。
胚の発生の過程で脳らしきものが出来上がってきても、その時点で地図が出来上がっているわけではない。これは主に生後になって、外界からさまざまな刺激が入ってくることで徐々に出来上がってくるものである。遺伝子は適当な刺激が入り脳内部でさまざまな物質過程が相関を伴って起こることによって発現され、その結果、例えば後頭葉が視覚野になるように準備される。このように機能分化はレディーメイドではなく、オーダーメイドである。したがって、脳はシステムがある拘束条件下で機能するようにサブシステムあるいはシステム要素としてのニューロン集団やニューロンの働きが決まってくるような拘束条件付自己組織システムである [14, 15]

[2] 記憶している最も古いものは高橋陽一郎氏による「物理学会誌」（1989 年、Vol.44, No.4）の解説記事の中の記述だ。

最近、脳神経細胞が外部から刺激がなくても活発に活動していることが分かってきた。これは神経細胞の自発放電が単にランダムで無意味な神経発火ではなく、なんらかの意味を持った神経活動であろうという推論に導く。オン・ゴーイング・アクティビティーなどとも呼ばれ、90 年代の半ばあたりから本格的な研究がある。運動野、視覚野で主に時空カオス的な活動が観測され、それらは特異的な刺激が入ってきたときに、たとえその刺激が弱くともすぐに反応できるように閾値下の活動状態を準備しているかのようなダイナミックな活動状態である。これに関連して、デフォールトモード・ネットワークという概念が最近注目されている。

また、海馬でも類似の現象が発見されている。池谷裕二らは海馬 CA3 の培養細胞が作るネットワークシステムにおいて複数の明確な状態とそれらの間の遷移現象を発見した。複数の状態とは、ほぼ全部の細胞が同期する完全同期状態、いくつかの同期グループが現れる部分同期状態、5–8 ヘルツの周波数を持つ θ リズムという脳波に同期したリズム状態、ランダム発火の状態、活動状態が高・低を繰り返すアップ・ダウン状態である。これらの状態はいずれも単独ではさまざまな動物やヒトの脳で見つかっているものである。カルバコールというムスカリン受容体のアゴニスト（作動剤）に培養細胞群全体を浸すと、このような遷移が起こる。逆にムスカリン受容体のアンタゴニスト（拮抗剤）であるアトロピンに浸すと、遷移現象は起こらなくなり、どれかの状態に固定されてしまうのである。さらに、海馬で場所に特異的に応答する場所ニューロンを発見したオキーフらは場所ニューロンの活動を調べ、それらがアトラクターダイナミクスに従っている可能性を報告した。これに引き続いて、モザーたちのグループとマクノートンたちのグループは類似の実験を行い、アトラクターを作るニューロンのほかに、もっとダイナミックで複雑な活動をするニューロンを発見した。

5.2 アトラクター崩壊によるカオス遍歴

アトラクターで表される状態はしばしば崩壊し、アトラクター痕跡になり、アトラクター痕跡間を遷移する軌道が生まれる。遷移過程は面白い特徴をもっている。軌道はもとのアトラクターの近傍にしばらくは滞在するのだが、そこから離れて行くと別のアトラクター痕跡に行く。そこでまたしばらく滞在するがまたそこからも離れていく。アトラクター痕跡はもはや通常の意味のアトラクターとは呼べない。このような遷移過程はしばしばカオス的であり高次元空間の上の軌道であることが多い。逆に、一般にアトラクター痕跡は低次元の状態であることが多い。言い換えれば、遷移は高次元のカオスを使って低次元の異なる秩序状態を “移動” しているように見える。

遍歴は itinerancy とか itinerance とか表現される。そこで、ふらふらとカオス的に遍歴する旅人の運動から chaotic itinerancy という概念を池田研介、金子邦彦、ピーター・デイビスとともに作った [16]。現在、この概念は数学者の研究対象にもなっている。関連して、1981 年、アメリカの数学者ジョン・ミルナーによって測度を考慮したアトラクター概念が新たに導入された。

ミルナーアトラクターの定義を次に与える [17]。

定義：アトラクター（ミルナーの意味で）

M を滑らかでコンパクトな多様体とする。f を連続写像とする。閉集合 $A \subset M$ がアトラクターであるとは次の 2 条件が成立することである。

(1) $\rho(A) \equiv \{x \in M | \omega(x) \subset A\}$ としたとき、$\mu(\rho(A)) > 0$ が成り立つ。ただし、$\omega(x)$ は x の ω 極限集合である。

(2) $A' \subset A$ (ただし、$A' \neq A$) であって、$\mu(\rho(A) \setminus \rho(A')) = 0$ になるような A' は存在しない。

ミルナーアトラクターは位相的アトラクターを拡張するように定義されたかに見えるが、両者の関係は単純ではない。ミルナーアトラクターだが、位相的アトラクターでないものが存在することはもちろんであるが、位相的アトラクターだがミルナーアトラクターではないものも存在するからである [18]。

この節の最後に、カオス遍歴のシナリオについて現在までに提案されているものを列挙し、今後の研究課題としよう [20]。

1. 三つ組（カオス的不変集合、ミルナーアトラクター、リドルドベイシン）の存在
2. 不動点型ミルナーアトラクターの相互作用
3. Heterodimensional cycle の存在
4. 法双曲型不変多様体の存在
5. フラクタルベイシン境界にともなったミルナーアトラクターの存在。この場合はノイズ付きでカオス遍歴になる。

5.3 神経方程式のなかのカオス遍歴

「ノーベル賞のニューロン」と言えばヤリイカの神経軸策のことである。ヤリイカの巨大神経軸策の研究には多くの人が関わったが、ホジキンとハックスレーがスパイク発火の機構に関して実験式を含んだ 4 変数からなる微分方程式で表すことに成功し、一躍脚光を浴びた。ただし、ここでは一般の人の考え方とは異なる観点から一言注意を述べよう。4 章で述べた複雑システムの考えに従えば、ニューロン方程式はニューラルネットの挙動から定義されるべきものであり、ニューロン方程式からニューラルネットひいては脳の挙動が決定されるのではないということである。

さて、ホジキン・ハックスレー方程式は数学的には上の意味での実験式が入っているために煩雑である。そこで、類似の挙動を示すもう少し簡単な方程式が良く研究されている。フィッツヒューと南雲仁一が独立に同じタイプの方程式を考えていたので、フィッツヒュー・南雲方程式として知られている 2 変数からなる微分方程式である。

フィッツヒュー・南雲方程式

$$\frac{dv}{dt} = v - v^3 - u + I, \tag{25}$$

$$\tau\frac{du}{dt} = -au + v - b. \tag{26}$$

ここで、v は膜電位、u は不活性化の指標を与える変数、I は外部電流である。

イカの生存にとって大事な情報処理はえさに向かって飛びつくことと敵から逃げることである。どちらもすばやく正確に身体を動かさなくてはならない。ホジキン・ハックスレー方程式やフィッツヒュー・南雲方程式が示すパルス伝播の様子をコンピューター画面で眺めると、なるほどこれならすばやい動作が行えると思わせるような鋭いパルス伝播の様子が観察される。ホジキン・ハックスレー方程式を周期振動でゆすると膜電位はカオス的な振る舞いを示すようになることは合原一幸らと、バブロヤンツによって発見されたが、このカオスが何の役に立っているかは分かっていない。

ヒトの脳ではイカのニューロンよりもっと複雑なことが起きているはずである。驚くべきことに哺乳動物の大脳新皮質にはイカではなくフジツボやカタツムリのニューロンと同じタイプのニューロンが多数存在することが分かってきた。これはまた、モリス・ルカー方程式やヒンドマーシュ・ローズ方程式として定式化されている。これらはイカのニューロンとの対比で良く研究されてきた。イカのニューロンの数学モデルであるホジキン・ハックスレー方程式は双安定解やホップ分岐による周期解を持つ。これはクラス II としばしばいわれる（ホジキンの分類）。それに対してフジツボやカタツムリのニューロンはナトリウムイオンチャネルと同程度に速い A チャネルという抑制系のものがあり、クラス I と呼ばれている。クラス I はホップ分岐による周期解とサドル・ノード分岐が相互作用することで、周波数の小さな振動から大きな振動まで幅広いダイナミックレンジを持つ。藤井宏らはクラス I を数学的に研究し、クラス I*モデルを考案した。これを基にして我々は藤井らと共同でその数学的本質だけを取り出し、μ モデルと命名した。

μ モデル

$$\frac{dv}{dt} = -\mu v^2\left(v - \frac{3}{2}\right) + I, \tag{27}$$

$$\frac{du}{dt} = -u + \mu v^2. \tag{28}$$

この二種類のニューロンのネットワークにはさらに大きな違いが現れるだろうか。イカのニューロンのネットワークでは、パルスの伝播がよく見られる。これは理にかなっている。イカではパルス的な活動状態の変化の伝達によってどっちに泳ぐか、どの程度のスピードで泳ぐかといった比較的単純な情報処理が行われる。それに対してヒトなどの哺乳動物ではもっと複雑な情報処理が要求されるが、おそらくはそれに対応して脳のニューラルネットの活動状態は時空カオス的になるはずである。ロレンツカオスのようなたった 3 変数で表現されるカオスではなく、もっと多くの変数が互いに実質的な相互作用をして簡単には低次元に縮約されないような、より複雑で自由度の高いカオスが現れるのである。フジツボが持つようなニューロン特性は少なくともイカよりはこのような自由度の高いカオスを生成するのに向いている。

本講義では μ モデルの結合系が示すカオス遍歴現象を紹介する [19]。また、カオス遍歴の実証実験としてフリーマンのにおい情報処理におけるカオス転移 [3] を紹介する。

5.4　記憶はミルナーアトラクターか?

記憶はどのようにして生まれたのだろうか。生物学的にはこれはまだ解明されていないが、いくつかの論理的可能性を考えることはできる。その一つは、初期の単純な神経回路におけるフィードバック回路の出現によって遅れが生じたことが原始的な記憶を作ったという考えである。この遅れに始まり徐々に高度になって行った記憶は「心」と呼ばれている脳活動の原点になっただろう。また、大げさな言い方をすれば、記憶は意識と絡むことで数学をも作り出す。この節では、記憶の中でもエピソード記憶と呼ばれている記憶と海馬と呼ばれている脳内器官の活動との関係を述べる。

エピソード記憶に関して我々は次のような仮説を提案した。

仮説：エピソード記憶とアトラクター

個々のエピソード記憶はミルナーアトラクターによって表現され、ミルナーアトラクターのアトラクター痕跡をつなぐある長さの連鎖はある特定のエピソードのまとまりを表している。

仮説：エピソード生成とカオス遍歴
このとき、これらのエピソードの連結を可能にするのがカオス遍歴である。カオス遍歴は点であった記憶を線にする。この意味において、カオス遍歴は短期記憶から長期記憶への移行過程において決定的な役割を果たしている。

海馬はエピソード記憶の形成過程に必須であることが臨床的に知られている。エピソード記憶形成に関して、我々は数学モデルを作って研究した [21]。その概要は次のとおりである。

仮説：海馬 CA3 ダイナミクスとカオス遍歴
海馬 CA3 において個々の出来事がミルナーアトラクターとして一時的に表現され、CA3 の不安定化機構によりこれらミルナーアトラクターがある順番で連結される。このとき、この連結を可能にするものがカオス遍歴である。ミルナーアトラクターのある長さの連鎖はある特定のエピソードを表現している。

仮説：CA3 の不安定化機構
CA3 の不安定化機構とは錐体細胞を抑制する抑制性細胞の存在による。

仮説：エピソードと弱いカオス
各エピソード間の相関が弱く、互いに関連性のうすいエピソード間の遷移はほぼ完全にランダムに起こり結び付けられたエピソードは脈絡がないものになる。つまり、エピソード記憶は経験したエピソードとは無関係なものになる。この場合の各エピソード間の連結は高次元のカオスであり、多くの場合ランダムである。つまり、強いカオスの場合はエピソードを起こった順序では記憶できない。
このように、CA3 におけるエピソード記憶の再生産は弱いカオスによる遍歴によるはずである。この弱いカオスの発生は例えばミルナーアトラクターの存在によって可能になるのである。

さらに、CA1 の神経システムは CA3 の神経システムから出力を受け取っている。CA1 から直接に CA3 へはフィードバックはない（あっても少ない）と考えられている。つまり、CA3 で発生したカオスが CA1 に入力される。CA1 の神経システムの特徴を調べると、それはシナプス学習による変化を別にすれば、極めて安定なダイナミクスに従っていることが分かる。つまり、CA1 は縮小ダイナミクスに従っていると考えることができるのである。4 章と 5 章で、カオスダイナミクスから一方的に情報を受け取る安定なダイナミクスに従う空間にはカントル集合ができ、カントル集合の各要素はカオスで生成された無限の記号列によってラベル付けされることを見た。CA3 と CA1 のダイナミクスの特徴を考えると、CA1 のニューラルネットトの状態空間には 4,5 章で見たようなカントル集合が生まれているのではないかという想像が成り立つ。
我々は海馬ニューロンの生理学的特性を再現する数学モデルを使って、ネットワークを構築し、入力時系列に対する CA1 ニューロンの情報表現を詳細に調べた。その結果、CA1 に AMPA と NMDA と呼ばれる二種類の受容体が存在するときは入力時系列が約 30 ミリ秒から 80 ミリ秒の間隔で入力される限りにおいて、CA1 ニューロンの膜電位はカントル集合的な階層性を示すことがわかった。つまり、我々の理論が予言するところをまとめると次のようになる。

予想：CA1 のカントル集合的電位変化
ニューロンの膜電位変化の間にはカントル集合による関係付けが生まれる。このカントル集合の各要素は CA3 で生成されたある長さを持った個々のエピソード記憶に対応するはずである。時間変化の履歴が CA1 の電位が作る相空間に階層的なパターンとして焼き付けられる。

こういったことが本当に脳でおこっているかどうか。

予想の検証：カントル集合的階層構造の発見
生後 1 週間程度のウィスターラットの海馬 CA1 において、ニューロンの膜電位は入力時系列の履歴に応じた深さを持つ階層構造を示すことが観測された。

むろん、実験ではこの階層構造がカントル集合であることを直接示すことはできない。しかし、実験データに縮小アフィン変換が存在することが分かった。一般にアフィン変換とは縮小、拡大、平行移動、反転などの変換のことである。ここでは単に $y = ax + b$ のような一次変換を意味する。ここで、a と b はパラメーターである。この変換が縮小であるというのは $0 < a < 1$ のことである。

予想の検証：縮小アフィン変換の存在
理論的には、このような縮小アフィン変換を使ってカントル集合が生成できるので、実際我々のモデルで縮小アフィン変換が現れるかどうかを確認した。実際、時系列入力の存在下において CA1 のモデルニューラルネットに縮小アフィン変換が創発することでニューラルネットの状態空間にカントル集合が生成されることが見出された。

したがって、実験データに縮小アフィン変換が見つかったことは実験データが示す膜電位の階層構造はカントル集合であると考えるのが妥当である。そこで、CA1 は膜電位のカントル集合によって時系列情報を表現することが実証されたと言ってよかろう。また理論が予想したように、錐体細胞がスパイク発火をしていてもその膜電位に階層的に入力時系列が表現されることも併せ実証された。

理論の残りの半分「CA1 はカントル集合によってエピソード記憶を形成する」を実証するためには、動物の行動に伴う海馬ニューロンの活動状態の測定を行わなければならない。こういったエピソード記憶に関する行動実験は主にラットのような動物を使って行われている。しかし、近年ラットのエピソード記憶は人間のような複雑な文脈を伴うものではなく、もっと単純な事象が起こってからの時間の長さにのみ関係していることを示唆する実験事実が報告された。また行動実験と同時測定された海馬の活動状態の時間変化に関する分析がなされていないなど、我々の仮説全体はまだ検証されていない。

記憶を持つことで我々は時間軸を簡単に旅することができる。記憶によって、過去の出来事を現在に再現することができるし、また未来を想像する事も可能になる。後者に関しては、最近マグワイアらによって報告された臨床例が興味を引く。マグワイアらは海馬に障害のある患者と健常者にいくつかの単語を示し、それをもとにお話を作るように指示した。ただし、過去の記憶に頼って話を作らないようにと注意を与えた。むろん、健常者はいろんな物語を作ることができた。その内容は、変化に富み聞き手をあきさせない内容だった。しかし、海馬に何らかの障害のある患者は複雑なストーリーを構成できず、例えば「ただ私には青い空が見えるだけです。白い砂浜と ⋯ 。」といった回答が精一杯であるように見えた。臨床実験を繰り返し、マグワイアらは、海馬は想像力を作り出すのに関係しているのではないかという仮説を出している。もしこの仮説が正しいなら、海馬は想像力によって現在を未来に移し変えることを可能にしているのかもしれない。このようにして、海馬による時空の旅が可能になるのではないだろうか。

6 構造安定性と記述安定性

最後に、良いモデルとはどういうモデルのことかを考えよう。

6.1 構造安定性

力学系の安定性は構造安定性で与えられる [22]。構造安定性はアンドロノフとポントリャーギンによって自然現象の良いモデルが満たすべき条件として定式化された。良いモデルは、パラメーターの少しの変化で系の性質が変わるようなものであってはならない。例えば、二つの力学系、(R, ϕ_1), (R, ϕ_2) としてそれぞれ $dx_1/dt = ax_1$ と $dx_2/dt = bx_2$ を考えよう。ここで、a, b は実数値を取るパラメーターでともに符号は同じであるとしよう。力学系 1 のパラメーター a を少し変化させて b としたとする。この力学系の流れは、それぞれ $\phi_1 = x_1(0)\exp(at)$ と $\phi_2 = x_2(0)\exp(bt)$ である。すなわち、その挙動に本質的な違いはない。実際、二つの力学系は一対一で連続な位相同相写像 $x^b = y^a$ で変換される。パラメーターは片方が正で他方が負であるならば、二つの力学系の安定性は異なるが、上の変換はこのこととは無関係である。それで二つのパラメーターはごくわずかに変化していると想定している。一般に、構造安定性は次のように定義される。

定義：構造安定性（アンドロノフ・ポントリャーギン）
微分同相写像の空間 $Diff$ を考える。その要素である任意の力学系 $\forall f \in Diff$ に対して、その近傍 U_f に含まれる任意の力学系 $\forall g \in U_f$ が f と位相共役であるならば、すなわち、位相同相写像 h が存在して $fh = hg$ となるならば、力学系 f は構造安定であるという。

すなわち、構造安定性は微分同相写像の空間を位相同相で分類した概念である。一見、この定義は自然現象の良いモデルであるように見える。しかし、カオス力学系においてはこの定義では不十分であることが分かる。それは次の事情による。

例えばロジスティック写像 $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ の場合、パラメーター a をわずかに変えた写像ともとの写像の間には一対一の対応がある。しかし、a の値が周期倍分岐が集積した、いわゆるファイゲンバウム点より大きい値では、カオスと周期解が複雑に入り混じった構造をもっており、パラメーターのわずかの変化で解の構造は定性的に全く異なっている。したがって、構造不安定である。しかし、数値計算をすれば、あるパラメーターの範囲では解の構造に変化がないように見える。つまり構造不安定なのに構造安定に見える領域がある。また、モーザーが考えた次のような構造安定な系で二つの力学系の流れはともにトーラスで表現されるが、一方は安定多様体、不安定多様体に沿う軌道はなめらかで微分可能であるが、他方は安定多様体に沿う軌道が連続だがいたるところ微分不可能になる。解の挙動は定性的に全く異なっているように見える。

モーザーのトーラス (1969) [23]
2 次元トーラス上の座標を $x = (x_1, x_2)$ で表す。$T^2 \times R$ を考え、写像 $f : T^2 \times R \to T^2 \times R$ を次で定義する。

$$(x, y) \mapsto (Ax, \mu y), 0 < \mu < 1. \tag{29}$$

ここで、次の仮定を置く。

仮定：
1. 行列 A はユニモジュラーとする。すなわち、$\det A = 1$.

2. A の固有値を λ_1, λ_2 とすると、$|\lambda_{1,2}| \neq 1$.

この仮定から、λ は実数であり、$\lambda_1 = \lambda$ とすると、$\lambda_2 = \lambda^{-1}$ である。力学は y が属する R 方向では縮小写像なので漸近的に任意の軌道は不変トーラスへと吸引され、その固有値によって不変トーラス上の運動が定められる。

ここで、つぎのような摂動系を考える。

$$(x, y) \mapsto (Ax + \upsilon p(x, y, \upsilon), \mu y + \upsilon q(x, y, \upsilon)). \tag{30}$$

ここで、p, q は C^1 級で周期 1 の周期関数である。また、$|\upsilon| \ll 1$ と仮定すれば、この摂動系での不変トーラス M_υ が存在する。

モーザーは次の定理を証明した。

定理：トーラスの微分可能性

1) $0 < \mu < |\lambda| < 1$ ならば、M_ϵ は連続で微分可能である。

2) $0 < |\lambda| < \mu < 1$ ならば、M_ϵ は連続だが、微分不可能である。このとき、ヘルダー連続性の次数 α は $\alpha = \log \mu / \log |\lambda|$ で与えられる。さらに、不変トーラスのハウスドルフ次元は $D_H = 3 - \alpha$ で与えられる。

ちなみに、位相次元は $D_{top} = 2$ であり、$D_H - D_{top} < 1$ である。我々は、この不等号が逆になるようなアトラクターを生成する力学系を構成し、この研究が後の海馬におけるカントルコーディング理論を導いたのである。

さて、不変トーラスの形を導こう。簡単のため、$p = 0, q = \cos 2\pi x_1$ を選ぶ。すなわち、$(f(x, y) = (Ax, \mu y + \epsilon \cos 2\pi x_1)$。$T^2$ 上の関数 $y = v(x)$ に対して、$y = \epsilon v(x)$ は不変トーラスを表す。変換に対する不変性より、$\epsilon \mu v(x) + \epsilon \cos 2\pi x_1 = \epsilon v(Ax)$ が成り立つ。したがって、

$$v(Ax) - \mu v(x) = \cos 2\pi x \tag{31}$$

なる関数方程式が得られ、この方程式の解が不変トーラスの形を決める。

一般に、関数方程式 $v(Ax) - \mu v(x) = q(x)$ の解は

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k q(A^{-k-1}x) \tag{32}$$

で与えられる。ここで、A の固有値 λ に対する固有ベクトルを e とし、$e = (e_1, e_2), e_1 \neq 0$ とする。x を直線 $x = te$ に制限する。 e はトーラス上の安定方向の固有ベクトルである。$2e_1 = \lambda$ になるように、この固有ベクトルを規格化すると、

$$v(te) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \cos(\lambda^{-k} \pi t) \tag{33}$$

これは、ワイエルシュトラス関数であり、ハーディーによって、$|\lambda| < \mu < 1$ の時は、t のすべての値に対して、$\alpha = \log \mu / \log |\lambda|$ 次のヘルダー連続であることが証明されている。

このように、不変トーラスは摂動に対して安定であるという意味で構造安定であるが、摂動を受けた後は縮小方向に対して連続だがいたるところ微分不可能な関数で表現されるようなアトラクターであり、アトラクターの形は全く異なり、かつ不変トーラス上の運動も複雑なものになる。

以上のように、構造不安定だが観測上（計算上）は構造安定に見える力学系、逆に構造安定だがアトラクターが全く異なりダイナミクスも異なって見え、まるで構造不安定であるかのように見える力学系が存在するのである。そこで、上の構造安定性とは異なる定義がほしくなる。何人かの数学者が異なる定義を提案したが、上の二つの一見矛盾した状態を解決できるものではなかった。そこで、我々は、観測や記述にとって安定である概念を擬軌道追跡性からヒントを得て、記述安定性という概念を提案することにした。

6.2 記述安定性

擬軌道追跡性を基にして、近似可能性を定義し、そのうえで、一つの試みとして記述安定性を定義する。最初の二つはそれぞれ α 擬軌道と β 追跡の言いかえに過ぎない。

定義：瞬間近似可能性

コンパクト空間 W 上の連続写像、F と $\tilde{F}$ を考えよう。初期値 y_0 に対して、$\{F^{(n)}(y_0)\}$ と $\{\tilde{F}^{(n)}(y_0)\}$ はともに W 上の軌道を表す。任意の n に対して、$F \circ \tilde{F}^{(i-1)}(y_0)$ が $\tilde{F}^{(i)}(y_0)$ の α 近傍にあるような α が存在するならば、$(\tilde{F}, W)$ は (F, W) の α 程度の瞬間近似可能な力学系という。

定義：連続近似可能性
ある初期値 $x \in W$ に対して、任意の n で $F^{(n)}(x)$ が $\tilde{F}^{(n)}(y_0)$ の β 近傍にあるような $\beta > 0$ が存在するならば、$(\tilde{F}, W)$ は (F, W) を β 程度に連続近似するという。

定義：集団近似可能性二つの軌道の集合、$\{F^{(n)}\}_n$ と $\{\tilde{F}^{(n)}\}_n$ の $\{\tilde{F}^{(n)}\}_n$ から見た $\{F^{(n)}\}_n$ へのハウスドルフ距離が十分近いとき、力学系 $(\tilde{F}, W)$ は力学系 (F, W) を集団近似するという。力学系 (F, W) は上の意味でのハウスドルフ距離が十分近い任意の力学系によって集団近似される時、集団近似可能な力学系といわれる。

定義：記述安定性
F と $\tilde{F}$ が連続写像として近傍にあり、(F, W) が任意の $\tilde{F}$ に対して集団近似可能であるならば、力学系 (F, W) は記述安定であるという。

上のモーザーの例では、C^1 級の摂動を与えているので、C^1 の範囲で連続写像間の距離を定義する。摂動系の不変トーラスは微分不可能なので、有限の範囲でトレースできる力学系は存在しない。よって記述不安定である。

参考文献

[1] D. Ruelle and F. Takens, “On the nature of turbulence”. *Commun. Math. Phys.*, **20** (1971), pp.167-192.

[2] L. ランダウ・E. リフシッツ 著、竹内 均 訳、『流体力学 1：ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程』、東京書籍、1970.

[3] 例えば、Walter J. Freeman, *“How Brains Make Up Their Minds”*, A Phoenix Paperback, 1999.

[4] 津田一郎『心はすべて数学である』（文藝春秋、2015）

[5] 金子邦彦・津田一郎 著『複雑系のカオス的シナリオ』（朝倉書店、1996）.

この本の英語訳は、K. Kaneko and I. Tsuda, *“Complex Systems: chaos and beyond”*, Springer-Verlag, 2001.

姉妹書に、金子邦彦・池上高志　著『複雑系の進化的シナリオ』（朝倉書店、1998）がある。

[6] 『ハーバート・A・サイモン、システムの科学』（稲葉元吉・吉原英樹　訳、パーソナルメディア、第 3 版、1999）.

[7] V. I. アーノルド、A. アベズ『古典力学のエルゴード問題』　(吉田耕作　訳、吉岡書店、1972).

森真・水谷正大 著『入門力学系』（東京図書、2009）はエルゴード理論の入門書としても使える (第一刷はミスプリがかなりあるが、読者が訂正しながら読むことができる範囲のものである)。

物理学生向きのエルゴード問題の問題意識を明確に語っているのは、

中野藤生・服部真澄 著『エルゴード性とは何か』（パリティ物理学シリーズ、丸善出版、1994)。

ただし、ハウスドルフ測度の定義は正確ではないので、読者は本書の記述か岩波数学辞典を参照すること。また、ストレンジ・アトラクターの通常の日本語訳は「奇妙なアトラクター」であるが、この本では「異常なアトラクター」となっている。ストレンジアトラクターという言葉の由来は次による。この言葉をリュエルたちが提案する以前において、力学系のアトラクターは不動点、極限周期解、トーラスの三種類しか知られていなかった。これらのどれにも属さない新しいアトラクターが存在するという発見に接し、リュエルとターケンスは「ストレンジ」という形容詞をつけたのだった。したがって、「異常さ」はなく、「奇妙な」ものとして謙虚に受け止めたのだろう。さらに、この本ではリアプノフ指数に関係して、「特性指数」を「特殊指数」といっているが、これも英語からの翻訳の日本語がすでに専門用語になっているという事実を無視した結果であろう。英語は characteristic exponent である。これらを除けば、この本は大変優れたものである。特に、統計物理学での n 体近似の意味がよく分かる。

統計物理学の良書はいくつかあるが、宇宙に孤立系は存在しない故にすべてはカノニカル・アンサンブルとして扱うという立場で書かれた、ランダウ・リフシッツ『統計物理学』（小林秋男・他 訳、岩波書店、1980）においては、エルゴード問題はそもそも存在しないと考えられている。

[8] K.T. アリグッド、T.D. サウアー、J.A. ヨーク 著『カオス』（津田一郎 監訳、星野高志・黒田拓・阿部巨仁・松本和宏 訳、シュプリンガー・ジャパン、2006）

カオス力学系の入門書として大変良い本である。1 次元力学系、記号力学系、高次元力学系、分岐理論と進んでいく。例題も多く、研究室探訪といった主に実験室で観測された現象に触れる付録的なものが各章末に設けられている。カオス力学系の良書はかなりの数に上るが、

S. ウィギンズ 著『非線形の力学系とカオス』（丹羽敏雄 監訳、田中茂・森真・今井桂子 訳、シュプリンガーフェアラク東京、2000）

C. ロビンソン著『力学系』（國府寛司・柴山健伸・岡宏枝 訳、シュプリンガー・ジャパン、2001）

などはカオスや力学系の良い入門書である。

[9] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), pp.130-141.

[10] B. マンデルブロ 著、『フラクタル幾何学』（広中平祐 監訳、日経サイエンス、1985）

本書は、Benoit Mandelbrot, *“Fractal geometry of nature”* (W H Freeman & Co, 1982) の訳である。

マンデルブローの本よりもう少し数学的に厳密にしたのが、

K. ファルコナー 著、『フラクタル幾何学の技法』（大鑄史男・小和田正 訳、シュプリンガー・フェアラーク東京、2002）

である。数学の学生はこちらから入ってもよいかもしれない。

[11] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. of the AMS*, **73** (1967), pp.747-817.

[12] H. ポアンカレ、『常微分方程式　天体力学の新しい方法』（福原満洲雄・浦 太郎 訳・解説、共立出版、1970）。

[13] T. Y. Li and J. A. Yorke, “Period three implies chaos” , *The Amer. Math. Month.*, **82** (1975), pp.985-992.

[14] I. Tsuda, Y. Yamaguti, and H. Watanabe, “Self-organization with constraints — A mathematical model for functional differentiation —, *Entropy*: special issue on Self-organization and Information, 2016, 18,74:doi:10.3390/e18030074

I. Tsuda, “Self-organization of a second kind: general scope and a cortical case study”, *Proc. of ICCN2015* (to be published, 2016).

I. Tsuda, *”Self-organization of the second kind: A variational approach”*, (in *”Handbook of Large-Scale Random Networks”*), Bolyai Society Mathematical Studies, **18** (Springer-Verlag, to be published in 2016).

自己組織化の問題を再考すると、従来の自己組織化の理論の枠に必ずしも収まらないが重要な現象が存在するように見える。脳の機能分化や胚の発生過程に見られる細胞分化の問題である。具体的な物質過程の違いというよりも数学的な構造が異なっているように見える。従来の自己組織化がミクロな原子分子の相互作用によってマクロな秩序状態が形成されることに焦点を当てたのに対して、上のような系では、マクロな制約条件のもとでの系の部分系への分化、あるいは部品への分化の問題に焦点を当てている。数学的には変分問題や部分最適化の問題と関係している。

[15] 津田一郎 著、『複雑系脳理論- -「動的脳観」による脳の理解』、サイエンス社, 2002.

本書は筆者の『カオス的脳観』（サイエンス社、1990）以降約 10 年間の脳のダイナミクス研究の発展を書いたものである。姉妹編として、

津田一郎 著、『ダイナミックな脳』（双書 科学／技術のゆくえ）、岩波書店, 2002.

がある。後者では 3 名の人物による脳の理解とダイナミクスに関するさまざまな議論が展開されるという形式をとった。

これは、

I. Tsuda,*Toward an interpretation of dynamic neural activity in terms of chaotic dynamical systems*, Behavioral and Brain Sciences, **24**(5) (2001), pp.793-847.

に出版された内容を下敷きに書かれた。この論文を出版した専門雑誌 Behavioral and Brain Sciences は大変ユニークで、著者が書いたターゲット論文が 6 人のレフェリーによって査読され受理されると、20 人–30 人の研究者からそれぞれ 1–2 ページのコメントが寄せられる。著者はそれらすべてに対してコメントし、全体を一つのストーリーでまとめなくてはならない。この 3 部をもって一つの論文となる。

[16] Ikeda K., Otsuka K., and Matsumoto K., “Maxwell-Bloch turbulence”, *Prog. Theor. Phys. Suppl*, **99** (1989), pp.295-324.

Kaneko K., “Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in network of chaotic elements”, *Physica D’*, **41** (1990), pp.137-172.

Tsuda I., “Chaotic itinerancy as a dynamical basis of Hermeneutics of brain and mind”, *World Futures* **32** (1991), pp.167-185.

また、デイビスも奈良重俊との共同研究で類似の現象を光系で見つけ、発表した。

Nara S. and Davis P., “Chaotic wandering and search in a cycle-memory neural network”, *Prog. Theor. Phys.* **88** (1992), pp.845-855.

なお、レビューは以下の三編を参照のこと。

K. Kaneko and I. Tsuda, “Chaotic Itinerancy” , *Chaos*, **13**(3)(2003), pp.926-936.

この論文は非線形力学系とカオスに関する物理、応用数学の専門誌である *Chaos* のカオス遍歴に関する特集号の序文である。この中に、カオス遍歴に関するオリジナル論文の引用もある。最近のレヴューとしては

I. Tsuda, “Chaotic itinerancy”. *Scholarpedia*, **8**(1):4459, (2013).

I. Tsuda, “Chaotic itinerancy and its roles in cognitive neurodynamics”, *Current Opinion in Neurobiology*, **31** (2015), pp.67-71.

がある。前者は、イジケビッチニューロンの発明者で神経ダイナミクスの力学系モデルに関する本（下記）を書いた計算論的神経科学者であるイジケビッチが主催している学者版ウィキペディアであるスカラペディアの中の一項目として出版された。

Eugene M. Izhikevich, *“Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting”*. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts, London, England, (2007).

また後者のレビューは、有名な神経生物学のレビュー雑誌に出版された。

[17] Milnor, J., “On the concept of attractor”, *Comm. Math. Phys.* **99** (1985), pp.177-195.

[18] C. Robinson, *Dynamical Systems*, CRC Press, 1999.
カオス力学系の成書としても推薦できる本である。邦訳は、「力学系」(國府、柴山、岡、訳、シュプリンガー・ジャパン)。

[19] Tsuda, I. and Umemura, T., "Chaotic itinerancy generated by coupling of Milnor attractors", *Chaos*, **13** (2003), pp.926-936.

[20] I. Tsuda "Hypotheses on the functional roles of chaotic transitory dynamics", *CHAOS*, **19**, 015113-1-10 (2009); DOI: 10.1063/1.3076393

[21] カントルコーディングに関する私たちのオリジナル論文は以下である。

I. Tsuda "Chaotic Dynamics, Episodic Memory, and Self-identity", in *Advances in Cognitive Neurodynamics(II): Proceedings of the Second International Conference on Cognitive Neurodynamics* 2009, (eds. R. Wang and F. Gu, Springer, 2011, pp.11-18); DOI: 10.1007978-90-481-9695-1_2

S. Kuroda, Y. Fukushima, Y. Yamaguti, M. Tsukada and I. Tsuda, "Emergence of Iterated Function Systems in the Hippocampal CA1", in *Advances in Cognitive Neurodynamics(II): Proceedings of the Second International Conference on Cognitive Neurodynamics* 2009, eds. R. Wang and F. Gu, Springer (2011) pp.103-106; DOI: 10.1007/978-90-481-9695-1_15

Y. Yamaguti, S. Kuroda, and I. Tsuda, "Representation of Time-series by a Self-similar Set in a Model of Hippocampal CA1", in *Advances in Cognitive Neurodynamics(II): Proceedings of the Second International Conference on Cognitive Neurodynamics* 2009, eds. R. Wang and F. Gu, Springer (2011) pp.97-101, DOI: 10.1007/978-90-481-9695-1_14

Y. Yamaguti, S. Kuroda, Y. Fukushima, M. Tsukada, and I. Tsuda, "A Mathematical Model for Cantor Coding in the Hippocampus", *Neural Networks*, **24**, pp.43-53 (2011); DOI: 10.1016/j.neunet.2010.08.006

S. Kuroda, Y. Fukushima, Y. Yamaguti, M. Tsukada and I. Tsuda, "Iterated function systems in the hippocampal CA1", *Cognitive Neurodynamics*, **3**(3), pp. 205-222, (2009); DOI:10.1007/s11571-009-9086-0

I. Tsuda, "Chaotic itinerancy reality in the dynamic brain ? episodic memory formation" , *ICIAM 07: 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Zurich, Switzerland, 16-20 July 2007): Invited Lectures* (Eds. R. Jeltsch and G. Wanner, European Mathematical Society, 2009), pp.365-380; DOI: 10.4171/056-1/17

I. Tsuda, Y. Yamaguti, S. Kuroda, Y. Fukushima and M. Tsukada, "A Mathematical Model for the Hippocampus: Towards the Understanding of Episodic Memory and Imagination", *Prog. Theor. Phys.*, **Suppl. 173** (2008), pp.99-108.

Y. Fukushima, M. Yoneyama, M. Tsukada, I. Tsuda, Y. Yamaguti, and S. Kuroda, "Physiological evidence for Cantor coding output in Hippocampal CA1", *Advances in Cognitive Neurodynamics: Proceedings of the International Conference on Cognitive Neurodynamics* 2007 (Eds. R. Wang, F. Gu, and E. Shen, Springer Science+Business Media B. V., 2008), pp.43-46.

I. Tsuda and S. Kuroda, "A Complex Systems Approach to an Interpretation of Dynamic Brain Activity II: Does Cantor coding provide a dynamic model for the formation of episodic memory?", *Lecture Notes in Computer Science*, **3146** (2004), pp.129-139.

I. Tsuda and S. Kuroda, "Cantor coding in the hippocampus", *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **18**(2)(2001), pp.249-258.

I. Tsuda, "Toward an interpretation of dynamic neural activity in terms of chaotic dynamical systems", *Behavioral and Brain Sciences*, **24**(5), (2001), pp.793-847.

カントルコーディングの部分的検証は以下の論文で報告された。ラット海馬のスライス実験ではカントルコーディングは実証されたが、活動中の動物やヒトの海馬でも同様のコーディングがなされているかどうかはまだ実証されていない。

Y. Fukushima, Y. Isomura, Y. Yamaguti, S. Kuroda and I. Tsuda, "Inhibitory Network Dependency in Cantor Coding", *Advances in Cognitive Neurodynamics (III), Proceedings of the Third International Conference on Cognitive Neurodynamics*, 2011, (ed. Y. Yoko, Springer (2013)), pp.635-640; DOI: 10.1007/978-94-007-4792-0_85

Y. Fukushima, M. Tsukada, I. Tsuda, Y. Yamaguti and S. Kuroda, "Spatial clustering property and its self-similarity in membrane potentials of hippocampal CA1 pyramidal neurons for a spatio-temporal input sequence", *Cogn. Neurodyn*, (2007), pp.305-316; DOI: 10.1007/s11571-007-9026-9

カントルコーディングのアイデアのもとになった論文は、以下である。それは、連続だが到る処微分不可能なアトラクターを構成することから始まった。

O.E.Rössler, J.L.Hudson, C.Knudsen and I.Tsuda, "Nowhere-differentiable attractors", *Int. J. of Intelligent Systems*, **10**(1995), pp.15-23.

I. Tsuda, "A new type of self-organization associated with chaotic dynamics in neural networks", *Int. J. of Neural Systems*, **7**(1996), pp.451-459.

I. Tsuda and A. Yamaguchi, "Singular-continuous nowhere-differentiable attractors in neural systems", *Neural Networks*, **11** (1998), pp.927-937, **12**(1999), p.203.

J. K. Ryeu, K. Aihara, and I. Tsuda, "Fractal encoding in a chaotic neural network", *Physical Review E*, **64** (2001) 046202:, pp.1-6.

[22] 構造安定性は、力学系の本には必ずといってよいほど触れられている。例えば、
C. Robinson, *Dynamical Systems*, CRC Press Inc., London, 1995.
V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1978.

しかし、構造安定性がほんとに力学系の安定性を規定する良い概念かどうかは議論がある。しかし、これはという決定打は出ていないように思われる。ロジスティック写像の 1 径数族やロレンツアトラクターの数値解析などからも、力学系の安定性に関しては新しい概念が必要だという認識は数学者の間で共有されているが、どの方向で定式化するのがよいか難しい問題である。

[23] J. Moser, "On a theorem of Anosov", *J. of Differential Equations*, **5**, (1969), pp.411-440.