液体ヘリウム４とファインマン

高知大学　國府俊一郎 *

2020 年 1 月 23 日

超流動が最初に発見されたのは、細い管の中を液体ヘリウム４が粘性なしに流れる現象であった [1]。熱散逸を伴う液体の流れの中に、ある温度で突如として非散逸の運動が現れる。これは数ある超流動の中でも最も劇的な現象である。こうした液体ヘリウム４の勉強を始めた時、誰でも以下の様な基本的な疑問に出くわすであろう。

(1) ヘリウム４の示す物性の中でも強く印象に残るのは、ロトンスペクトルの存在である。しかし今ひとつはっきりとしないのは、これはボース統計の結果なのか？ さらにランダウの有名な論文 [2] にある様に、これが超流動の原因なのか？ という点である。

(2) ボース統計とは、多体波動関数の対称性に関する性質である。この言わば幾何的な性質が、どの様にして細い管を粘性なしに液体が流れるという力学的な性質に繋がるのか？ この点もはっきりとしない。

液体ヘリウム４の超流動が発見されて以降、多くの理論家がこうした基本的な問題について思案してきた。中でも興味深い人物は R.P. ファインマンである。ファインマンが液体ヘリウム４を集中的に研究していたのは、量子電磁力学の研究が一段落して日本に滞在していた時期と重なる。京都大学基礎物理学研究所の黒板にヘリウム４原子に見立てた白い丸を多数書いて思索していた姿が目撃されている [3]。ファインマンは色々な角度から液体ヘリウム４の問題を考察しているが、よく教科書に引用されて多くの人の常識になっているのは、そのうちの１部にすぎない。あまり知られてはいないが興味深い物理的な議論がその論文には色々と書かれている [4]。よく知られる様にファインマンは物理を専門とはしない人々の間にも、カリスマ的な人気を持つ人物である [5]。しかしその論文や総説に何気なく書かれてある文章は深い内容を含み、物理を専門とする人間にとってもその真の意味を掴むのは容易ではない。

1　ロトンをめぐって

液体は物質の状態の中でも特に散逸の激しい状態である。にもかかわらず超流動相の液体ヘリウム４では、固体の場合と同様に音響フォノンのスペクトルが中性子非弾性散乱の実験で鮮やかに観察される。多くの理論家はこれをボース粒子系の超流動状態を象徴する現象とみなし、自由ボース気体の模型から出発してヘリウム原子間の相互作用を入れて理論的

* 名誉教授　E-mail: koh@kochi-u.ac.jp

にこれを導く事を試みた。確かにこれは多体問題に関心を持つ理論家にとっては食指が動く問題である。

ファインマンはこれに対して少し異なる角度からの説明を試みた。この音響フォノンが中性子非弾性散乱で観測されるのは、それが液体中の他の多くの励起モードと同じエネルギー領域にはないので邪魔されないからである。説明すべき課題は何故ボース統計が働くと音響フォノンのみが低い励起エネルギーを持ちうるか？ という点にある。これに対してファインマンは N 個の粒子に対して $3N$ 次元の配位空間を考える。（ファインマンが黒板に白い丸を多数書いていたのは、この $3N$ 次元の配位空間を頭に描いていたのであろう。）多体波動関数は $3N$ 個の空間座標の関数である。系の運動エネルギーは波動関数の $3N$ 次元空間での空間勾配で決まる。ボース統計の下では、波動関数は粒子の座標の入れ替えに対して不変になる。この為に、古典統計の下では 1 つの粒子が長い距離を移動した場合でも、ボース統計の下ではすぐ隣の粒子と入れ替わった場合と区別がつかない。基底状態の波動関数は定符号を持つが、励起状態の波動関数は基底状態のそれとは直交しているので、波動関数は正負に振動している。結局すぐ隣の粒子と入れ替わる様な励起であっても、波動関数はその都度正負に振動する事になり配位空間では大きな空間勾配を持つ。そのためにボース統計の下では励起状態の運動エネルギーは大きくなる。その結果、励起運動のエネルギーは以下の様な下限を持つ。

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\psi)^2 \geq \frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\delta\psi)^2}{r_0^2} \equiv \epsilon_0(\delta\psi)^2 \tag{1}$$

ここで r_0 は液体中の分子間の距離である。この ϵ_0 は通常の流体の実験で現れるエネルギーよりもはるかに大きい。

それにも関わらず音響フォノンのみが低い励起エネルギーを持つのは、このフォノンモードでは原子の変位が互いに加え合わされる（相加的）ので、原子の配位自体が大きく変化し、変位後の系の代表点は $3N$ 次元の配位空間の遠くに移動してしまう為である。故に波動関数の配位空間での勾配は小さくなり、低い励起エネルギーが可能になるのである。これとは反対に音響フォノン以外の励起エネルギーには、先の大きな空間勾配に由来するゼロからの大きなギャップが生じるので結局は励起されず、ロトンスペクトルが観測されるのを邪魔しない。これがヘリウム 4 でロトンが観測される事にファインマンが与える説明である。この機構には相互作用は関与しておらず、励起エネルギーのギャップはボース統計のみから生じている。そこでこれを「統計的ギャップ」と呼ぶことにしよう。

それではロトンスペクトルが生じた事自体には、ボース統計は関わっていないのであろうか？ この点については、著名な優れた理論家である P. ノジェールが次の様な興味深い推測を行なっている [6]。液体はその局所構造を短い時間で見ると、気体よりもむしろ固体に似ている。液体を固体とのアナロジーで理解しようという立場は、古くはフレンケルの液体論に始まる [7]。（この立場からの最近の総説は文献 [8] にある。）液体中では原子間の距離は小さくその環境は固体に近い。固体と異なるのは、隣り合う原子の組み合わせが次々と変化する点である。この観点から液体を見ると、液体は固体になる手前の状態にある。ロトンスペ

クトルの極小点の波長は、固体中の原子間距離の逆数に近い。ノジェールは、ロトンスペクトルとは液体中の局所構造に発生したソフトモードであると推測した。ソフトモードとは、固体の構造相転移で転移点以上の温度で観測されるフォノンである。これは転移後の構造を先取りする様な変位モードを持ち、転移温度に近づくにつれてその励起エネルギーは低下して連続的な構造変化が可能になる。この馴染深いソフトモードの概念が、液体ヘリウム４のロトンスペクトルと結びつくというノジェールの論文を読んだ時、筆者は虚を突かれた様な思いがしたのを覚えている。この立場に立てば、ロトンスペクトルの存在は液体に普遍的な現象であり、超流動相の液体ヘリウム４以外の液体でも存在するが、そこでは他の低いエネルギーの励起と紛れてしまうので観測されていないという事になる。とするとロトンスペクトルを超流動相にあるボース多体系の固有の励起として導こうとする過去の試みは、その目指すべき方向が少しずれている事になるのではないだろうか？ ファインマンのよく知られた別の仕事に、変分法を用いてロトンスペクトルを導く論文がある [9]。そこではロトンスペクトルが現れる原因は液体の２体分布関数にあり、ボース統計は主な原因になってはいない。ファインマン自身はその論文中でソフトモードという主張をしてはいないが、この液体の２体分布関数がロトンスペクトルの出現に主役を果たすという結果は、ノジェールの提唱と符合しているのではないだろうか。

2　粘性のない流れ

この立場から細管を粘性なしに液体が流れるという非平衡定常現象を眺めると、どう見えるであろうか？

2.1　流動率スペクトルで表した２流体模型

細管中の液体ヘリウム４に両端から振動する圧力を加えてその応答を見るという思考実験を考えてみよう。この方法は乱流の研究では思考実験ではなく実際に行われている [10]。しかしここでは乱流の実験よりもはるかに小さな振動数で圧力を振動させるとする。そこでの応答とは振動する流束密度 $j(\omega)$ であり、線形応答係数は運動粘性率 ν の逆数である流動率 $\sigma = 1/(4\nu)$ である。

$$\boldsymbol{j}(\omega) = \sigma(\omega) d^2 \frac{\boldsymbol{P}(\omega)}{L}, \tag{2}$$

（ここで d と L は細管の半径と長さを表す。）この流動率の振動数スペクトル $\sigma(\omega)$ を考えよう。細管の両側から加えられた圧力により液体中に生じる音響波のうち、波長無限大（つまり振動数ゼロ）の成分は、全ての粒子が並進する超流動流に対応する。超流動流が出現するとは、外力である圧力を取り去っても、出力としての超流動流が有限のままに留まる事を意味する。これが実現する為には、外力と出力を結びつける感受率が振動数ゼロで発散せねばならない。

$$\boldsymbol{j}(\omega) = \left[\sigma_s(\omega) + A(T)\delta(\omega)\right] d^2 \frac{\boldsymbol{P}(\omega)}{L}, \tag{3}$$

他方流動率のスペクトルには、常流動と超流動を問わず、その振動数について積分すると定数になるという総和則

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma_s(\omega) + A(T)\delta(\omega)]d\omega. \quad (4)$$

がある。その為、振動数ゼロにデルタ関数が現れるには、有限の振動数領域での流動率 $\sigma_s(\omega)$ がボース統計の為に $\sigma(\omega)$ より減少する必要がある。ここで先にロトンが観測される理由としてファインマンが提唱した「統計的ギャップ」が意味を持つ事になる。振動する圧力により液体中に生じた波のうち、1 波長が凝縮体内に収まる様な非音響波は、ボース統計による統計的ギャップの為に励起エネルギーが高くなり励起されない。凝縮体が成長して巨視的な大きさにまで達すると、ほとんど全ての非音響波の励起は抑制される。（これがランダウが超流動流に課した非回転性の条件 $rotv_s = 0$ の物理的理由である。）ゼロから遠い ω で $\sigma_s(\omega)$ が減少しても総和則を満たす為には、振動数ゼロで波長無限大の音響波、すなわち全粒子が並進運動する超流動流が現れざるを得なくなり、流動率のスペクトルには振動数ゼロの周りに鋭いピークが現れる。

以上の描像を定式化する為には、熱的外力に対する線形応答理論が必要である。細管の両側に加わる圧力は液体中を熱散逸を伴って伝播し、熱的外力とみなされる。電磁場の様な力学的外力に対する場合とは異なり、熱的外力に対する線形応答理論には様々な定式化の方法があり、それぞれに複雑である。(ファインマン自身もこの問題に興味を持ち、線形応答関係として実空間での圧力とずれ変形の関係を考察した。この場合の線形応答の出力である「ずれ変形」を空間の計量を変更して表すという奇抜な方法を考え、粘性率の表式を得た。ファインマンはこれを論文として発表していないが、その内容は文献 [11] に紹介されている。) この熱的外力に対する応答を記述する理論の複雑さが、細管を流れる超流動流を現象論を超えて統計力学的に取り扱う上での困難の 1 つになっていた。

しかし種々の定式化の中には、熱的外力の代わりに取り扱い易い仮想的な外力を考え、これと熱的外力（圧力）の間に巨視的な関係式を仮定して、圧力をこれに置き換えるという方法（間接法）がある。この方法は最も簡単であり、細管を流れる超流動流を定式化するのに適している。

流動率を複素数に拡張して $i\omega$ をかけるとそれは一般化感受率を構成する。その実部 $\omega\sigma_2(\omega)$ は少しだけ平衡からずれた状態の非散逸的な応答に、その虚部 $-\omega\sigma_1(\omega)$ は散逸的な非平衡過程の応答に対応し、両者は分散関係で結びついている。非散逸的な応答では流れの方向に垂直な変位が主役を演じているので、これを横感受率 $\chi^T(\boldsymbol{q},\omega)$ で表そう。分散関係は

$$-\omega\sigma_1(\omega) = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{4\eta_n}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int adq^2 \frac{\chi^T(\boldsymbol{q},\xi)}{\xi-\omega} \quad (5)$$

（$\omega = aq^2$、η_n は通常液体のずれ粘性率）となる。通常の液体では、振動圧力より生じる波の波長が長くなるにつれて縦応答と横応答の区別はなくなっていく。これを感受率で表すと、$\lim_{q\to 0}\chi^L(\boldsymbol{q},\omega) = \lim_{q\to 0}\chi^T(\boldsymbol{q},\omega)$ となる。通常液体の流動率 $\sigma_{1n}(\omega)$ を、この事によ

り特徴づけて

$$\sigma_{1n}(\omega) = \frac{1}{\pi\omega}\frac{1}{4\eta_n}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int adq^2 \frac{\chi^L(\boldsymbol{q},\xi)}{\xi-\omega}. \tag{6}$$

と表そう。しかし超流動液体になると統計的ギャップの為に横応答は抑制されるので、本来の定義 (5) を用いねばならない。故に転移温度近くの (3) の流動率 $\sigma_s(\omega) + A(T)\delta(\omega)$ は、(6) の両辺を (5) の右辺に加え更に引いて

$$\sigma_1(\omega) = \sigma_{1n}(\omega) - \frac{1}{\pi\omega}\frac{1}{4\eta_n}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int adq^2 \frac{\chi^L(\boldsymbol{q},\xi)-\chi^T(\boldsymbol{q},\xi)}{\xi-\omega} + A(T)\delta(\omega). \tag{7}$$

と表される。これが流動率スペクトルで表した 2 流体模型である。

2.2 統計的ギャップの役割

平衡から少しずれた状態の非散逸的な感受率 $\chi^T(\boldsymbol{q},\omega)$ を計算する際には、凝縮体が大きくなるにつれて非音響波の励起エネルギーに統計的ギャップが生じる事を考慮せねばならない。それには、s 個の粒子を含む凝縮体の分布 $h(s)$ が必要であり、これを求めよう。ボース粒子系の大分配関数

$$Z_0(\mu) = \exp\left[-\sum_p \ln(1-ze^{-\beta\epsilon_p})\right], \tag{8}$$

（ここで $z = \exp(\beta[\mu_0 - U_0])$ とする。）を以下の様に書き直す。その指数部を、$p = 0$ の粒子については

$$\ln(1-z) = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{s}, \tag{9}$$

を、 $p \neq 0$ の粒子については

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x^2 \ln(1-ze^{-x^2})dx = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{s^{5/2}}, \tag{10}$$

を用いて書き直すと、

$$Z_0(\mu) = \exp\left[V\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{e^{\beta\mu s}}{s} + \frac{V}{2\lambda_t^3}\frac{e^{\beta\mu s}}{s^{5/2}}\right)\right], \tag{11}$$

となる。ここで熱波長として $\lambda_t = \sqrt{2\pi\hbar^2\beta/m}$ を用いた。これを状態方程式 $N = k_BT\partial \ln Z_0/\partial\mu$ に代入すると、系の数密度が

$$\frac{N}{V} = \sum_{s=1}^{\infty}\left(e^{\beta\mu s} + \frac{V}{2\lambda_t^3}\frac{e^{\beta\mu s}}{s^{1.5}}\right). \tag{12}$$

の様に、大きさ s のコヒーレントな多体波動関数ごとの寄与の和として表される。これより転移温度直上の化学ポテンシャル $\mu(T)$ の状態では、s 個の粒子を含む凝縮体の分布 $h(s)$ は

$$h(s) = \frac{\exp(\beta\mu s)}{s}, \qquad (p=0), \qquad h(s) = \frac{V}{2\lambda_t^3}\frac{\exp(\beta\mu s)}{s^{2.5}}, \qquad (p\neq 0), \tag{13}$$

となる。この $h(s)$ を用いると縦応答と横応答を含む感受率は

$$\chi_{\mu\nu}(\boldsymbol{q},\omega)=\sum_s^{\infty} sh(s)\frac{\hbar}{2}\left[\frac{-q^2}{\omega-a_l q^2}\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}+\frac{-q^2}{\omega-\epsilon_t(s,q)/\hbar}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\right], \tag{14}$$

と書ける。ここで右辺第 1 項の縦応答は音響波に対応し、通常の縦励起のエネルギー $\omega=a_l q^2$ を持つ。他方、右辺第 2 項は横励起に対応し、その励起エネルギー $\epsilon_t(s,q)$ は凝縮体の大きさに依存する。細管に加えられた圧力による振動の波長が凝縮体の中に収まる時は、統計的ギャップの為に $\epsilon_t(s,q)=\epsilon_0$ は大きな値を持つので実質的には励起されない。他方、その波長が凝縮体の大きさを超える時は、通常の横励起のエネルギー $\epsilon_t(s,q)=a_t q^2$ となる。その境目の凝縮体の大きさの境界値 s_1 を見積もろう。我々は細管中を流れる凝縮体の形を知らない。しかしその平均的構造は細管の周りに軸対称であると仮定して良いであろう。その中で最もコンパクトな形は楕円体である。楕円体の体積は体積 r_0^3 の粒子が s 個集まったとして $(4\pi/3)R_\parallel R_\perp^2=sr_0^3$ である。細管方向の長軸 $R_\parallel$ は、楕円体の形を反映した係数 Z により $R_\parallel=s^Z r_0$ の様に指定される。今求めている凝縮体の大きさの境界値 s_1 は、流れに生じた変形の波長と凝縮体の細管方向の長軸が一致する条件 $s_1^Z r_0=2\pi/\sqrt{\omega/a_t}$ より決まり

$$s_1=\left(\frac{2\pi}{r_0}\sqrt{\frac{a_t}{\omega}}\right)^{1/Z}. \tag{15}$$

となる。感受率 (14) の右辺第 2 項の横応答の s についての和は、この s_1 よりも大きな s についてのみ励起が可能なのでゼロでない値を持つ。以上を考慮した縦応答と横応答の差を求め、分散関係 (7) の $\chi^L(\boldsymbol{q},\xi)-\chi^T(\boldsymbol{q},\xi)$ に代入してヒルベルト変換を行い流動率を導く。これは $\chi^T(\boldsymbol{q},\xi)$ については

$$a\int dq^2\sum_{s=1}^{s_1} sh(s)\frac{q^2}{\omega}\delta(\omega-a_t q^2)=-\frac{a}{a_t^2}\sum_{s=1}^{s_1}\exp(\beta\mu s)=-\frac{a}{a_t^2}f_B(0,T)[1-\exp(\beta\mu s_1)]. \tag{16}$$

となり、転移温度直上の流動率スペクトル全体として

$$\begin{aligned}\sigma_1(\omega)&=\sigma_{1n}(\omega)+\widetilde{A}(T)\frac{\pi}{d^2}\delta(\omega)\\&+\pi\frac{m_t^2}{m^2}\frac{\rho_s(T)}{4\eta_n}\left[1-\exp\left(\beta\mu(T)\left[\sqrt{(2\pi)^2\frac{m}{m_t}\frac{\epsilon_0}{\hbar\omega}}\right]^{1/Z}\right)\right].\end{aligned} \tag{17}$$

を得る。この式の $\sigma_{1n}(\omega)$ に流体力学より得られる流動率スペクトルを代入し、この式全体を総和則 (4) の $\sigma_s(\omega)+A(T)\delta(\omega)$ に代入する。転移温度に近ずき $\mu(T)$ がゼロに近ずくにつれて $\widetilde{A}(T)$ は増大し、超流動流を表す振動数ゼロの鋭いピークの出現を導く事が出来る。これにより、冒頭に述べた 2 番目の疑問、つまり波動関数の対称性がいかにして力学的性質に繋がるかという疑問に 1 つの答えが得られた様に思う [12]。

2.3 臨界速度の統計理論的解釈

細管を流れる定常流は、流体力学ではポズアイユ流として知られている。振動する圧力の下での流動率の振動数スペクトル $\sigma(\omega)$ は古くから得られており、振動数ゼロに山を持つ上向きに凸な減少関数である [13]。上向きに凸である事は、圧力の変動に対して流れが安定である事を意味している。通常の流れの中にある粒子は元々様々な運動をしているので、圧力の変化に対しても、全体としての状態は大きくは変らないのである。しかし (17) より得られる超流動相での流動率の振動数スペクトル $\sigma_s(\omega)$ は、下向きに凸な減少関数である。これは超流動流が圧力の変動に対して極めて不安定である事を意味する。これは通常の流れとは異なり、超流動流中の粒子は文字通り 1 方向の並進運動をしているので、圧力が変化すると容易に乱されるからである。

今考えている思考実験は、実験者が意図的に振動する圧力を加えた場合であるが、もし意図せずに圧力が振動したならば、何が起こるであろうか？ 超流動流の流速が大きくなり、細管の壁との摩擦により振動する圧力が発生すれば、流動率の振動数スペクトルが下向きに凸であるので超流動流は一挙に減衰するであろう。これを実験室で見れば、超流動流には臨界速度が存在すると解釈されるはずである。今まで臨界速度は主として流体中の渦輪の発生とその消滅という模型的な方法で説明されてきた [14]。しかしこの結果は、それだけではなく統計理論的な方法による臨界速度の説明も可能である事を意味する [12]。ただし、臨界速度の具体的な値を導くには、流体と細管の壁との摩擦がどの様な圧力振動を流体に生じるかの微視的な理論が新たに必要になる。

細管中の超流動の発生は最初に発見された超流動でありながら、永らく 2 流体力学という現象論の範囲内で扱われてきた。これを超える試みは、量子統計と線形応答理論と液体論が交差して初めて可能になるはずである。ファインマンはその各々に種を蒔いている。

参考文献

[1] P.Kapitza，Nature, **141**, 74 (1938), J.F.Allen and A.D.Meissner, Nature, **141**, 75 (1938)

[2] L.D.Landau，J.Phys **5**, 71 (1938), **11**, 91 (1947)

[3] ファインマン物理学. 5 量子力学（砂川重信訳、岩波、1796) 中の砂川氏による「訳者の序」

[4] R.P.Feynman，Phy.Rev **94**, 262 (1954), R.P.Feynman，in Prog in Low Temp.Phys. ed by Gorter (North Holland,Amsterdam, 1955) **1**, 17

[5] ファインマンはその死の 3 年前に来日して東京で講演を行った。その講演の終了後、赤くて重い教科書「ファインマン物理学」を持った若い人たちが列をなして並び、自然発生的にサイン会の様になった。これに対してファインマン先生は気前よくサインに応じていた。物理の講演会でこの様な光景を目撃したのは筆者には外に記憶がない。

[6] P.Nozieres，J.Low.Temp.Phys **137**, 45 (2004), **142**, 91 (2006)
[7] J.Frenkel，Kinetic Theory of Liquids (Oxford, 1946),
[8] K.Trachenko and V.V.Brazhkin，Rep.Prog.Phys **79**, 016502 (2016),
[9] R.P.Feynman and M.Cohen, Phy.Rev **102**, 1189 (1956), M.Cohen and R.P.Feynman, Phy.Rev **107**, 13 (1957)
[10] 林泰造、日野幹雄、乱流現象の科学，第 14 章、（巽友正編、東京大学出版会、1986）
[11] E.W.Montroll，in Rendiconti della Scuola Instituto di Fisica ”Enrico Fermi” **10**, Corso, 217 (1959). 分散関係 (5) では、粘性率の逆数（流動率）が相関関数で表されているのに対して、ファインマンの得た表式では粘性率そのものが相関関数で表されている。
[12] S.Koh, J.Phys.Soc.Jpn **88**, 014601 (2019)
[13] 教科書として、今井功、流体力学（前編）（裳華房，1975.)
[14] J.S.Langer and M.E.Fisher，Phy.Rev.Lett **19**, 560 (1967)