

# 修士学位論文

## 確率論的セルオートマトンモデルを用いた 周期境界条件を持つ1車線道路交通流の シンクロ性の解析

平成27年2月6日

物理学専攻

138s119s

福市 真之

神戸大学大学院理学研究科博士課程前期課程

# 目次

要旨	1
<b>第1章 交通流</b>	<b>3</b>
1.1 交通流と物理学	3
1.2 交通流で用いられる物理量	4
1.3 基本図	6
1.4 流体力学モデル	7
1.5 追従モデル	7
1.6 最適速度モデル	8
1.7 セルオートマトンモデル	9
<b>第2章 三相交通理論とシンクロ流</b>	<b>10</b>
2.1 三相交通理論	10
2.2 自由流と密集流	11
2.3 シンクロ流	13
2.4 渋滞流	14
<b>第3章 セルオートマトンモデルを用いた交通流の解析</b>	<b>15</b>
3.1 Nagel-Schreckenberg モデル (NaSch モデル)	15
3.2 NaSch モデルの運動ルール	15
3.3 NaSch モデルのシミュレーション	17
3.4 修正 NaSch モデル (mNaSch モデル)	20
3.5 mNaSch モデルの運動ルールとシミュレーション	20
<b>第4章 緩やかな安全速度を持つ交通流の解析 (gradual-NaSch モデル)</b>	<b>25</b>
4.1 無衝突を示すために用いられる関係式の数学的証明	26
4.2 シミュレーション	32
<b>第5章 結果と考察</b>	<b>37</b>
参考文献	39
謝辞	42
付録 A mNaSch モデルの占有率	43
付録 B gradual-NaSch モデルの基本図と平均速度と占有率	48

# 要旨

交通流の諸現象は、多数の人間が自分の意思に従い思考しながら運転する車両集団の振る舞いにより引き起こされる。ほとんどの運転手はできるだけ早く目的地に到達したいという意思を持っており、自ら渋滞を起こしたいとは思っていないが、どのような道路であっても車両数（車両密度）が増大するにつれて渋滞が発生する。交通流は渋滞-非渋滞相転移現象に代表される物理学的性質を持つのである。

渋滞-非渋滞相転移現象など交通流の物理学的研究が盛んになる契機を作ったのは、1992年に発表された Nagel と Schreckenberg によるセルオートマトンモデル (NaSch モデル) である<sup>2) 33) 34) 35)</sup>。これは制限速度（最大速度）のある 1 車線道路上で車両の運動を追跡する、離散化された交通流モデルであり、渋滞-非渋滞相転移を再現することが数値シミュレーションにより示されている。ところで、Kerner は 2000 年頃に、交通流の相転移現象を渋滞-非渋滞という 2 相ではなく、自由流・シンクロ流・渋滞流の異なる 3 相に分類した<sup>5) 6) 31)</sup>。それぞれ、交通流に含まれる車両集団について次のように記述できる。

- 自由流：車両が希望する速度で走ることができる状態
- シンクロ流：車両が厳密に、あるいはほとんど同じ速度で走る状態
- 渋滞流：停止している車両が存在している状態

この 3 相で交通流を分類する Kerner の理論は三相交通理論と呼ばれる。

シンクロ流を再現するモデルはいくつか提唱されてきたが、それらは複雑な規則を含むものであり<sup>37) 38) 39)</sup>、シンクロ流の生じる本質的な機構は完全には明らかにされていない。このような状況の下、Chmura らはシンクロ流を再現する単純で確率的なセルオートマトンモデル (mNaSch モデル) を提案した<sup>40)</sup>。このモデルは、交通流の各車両が互いに衝突しないように、(a) 車間距離が広がれば許容される速度を増大し、(b) 車間距離が狭まれば速度を落とす、このような速度基準（安全速度）を各車両が知っているという、現実の交通流における自然な規則を取り入れたものである。

---

参考文献の番号は第 1 章から昇順に整理した。

mNaSch モデルでは、ある 1 つの関数形で与えられる安全速度が取り扱われている。さて、安全速度の選択は一意ではなく、シンクロ流を再現する安全速度のユニバーサルな特徴は明らかにされていない。そこで、本研究では「車間距離に対して運転手に許容される速度の上限値」が「mNaSch モデルの速度の上限値」よりも小さい 2 種類の関数形の安全速度を提示し、それを取り込んだモデルに対して数値解析を行った。本論文では、これらの変形されたモデルを gradual-NaSch モデルと呼ぶことにする。まず、この変形の下で各車両が衝突する可能性があるため、任意の最大速度に対して各車両が衝突しないことを確認した。そして、新たに導入した gradual-NaSch モデルは mNaSch モデルと同様に自由流・シンクロ流・渋滞流の間の相転移現象を再現することが示された。数値計算の結果について要約すると、gradual-NaSch モデルには元の mNaSch モデルと比較して以下のような特徴がある。

- 車両速度が小さくなる傾向がある。
- 平均速度に比例する交通流率が小さくなるという傾向が示される。

車間距離に対して gradual-NaSch モデルにおける速度の上限値は mNaSch モデルに比べて小さいからである。今後は、安全速度の関数形が mNaSch モデルよりも急な傾きの関数で与えられる場合に関してもシンクロ流が生じるか等を調べる必要があるであろう。

# 第1章 交通流

## 1.1 交通流と物理学

交通流の現象は、多数の人間が自分の意思に従い思考しながら運転する車両集団の振る舞いにより引き起こされる。例えば、人々はできるだけ早く目的地に着きたい、あるいは他人の車両に衝突しないような安全走行をしたいといった意思を持っているのだ。この事実から、交通流はこれまでの自然科学が扱ってきたような物質的な現象ではないことは明らかである。それでは、交通流の現象は物理学の範疇に入らないのだろうか。まず、現実の道路と運転手を考えてみよう。道路には信号の有無や車線数や形状および各国の道路交通法等の相違が存在する。また、ほとんどの運転手はできるだけ早く目的地に到達したいという意思を持っており、自ら渋滞を起こしたいとは思っていない。このような状況の下、道路上で事故が起これば道路が封鎖される等の理由により車両が走行できなくなり渋滞が発生することもあるが、事故が起きなくとも渋滞が発生することもある。実際、道が狭いなどにかかわらず<sup>1)</sup>、どのような道路であっても車両数が増大するにつれて渋滞が発生する。交通流のイメージを理解するために、現実の道路上における交通流の写真である Fig. 1.1 を見てみよう。赤色の枠は、多数の車両が道路上で密に詰まっており、自由な走行ができず渋滞している様子を表し、青色の枠は、道路上の車両数が少なく、各車両は自由な走行ができ渋滞していない様子を表す。



Fig. 1.1: 実際の道路上における交通流の写真。赤色の枠で囲まれた領域は、多数の車両が道路上で密に詰まっており、自由な走行ができず渋滞している様子を表す。青色の枠で囲まれた領域は、道路上の車両数が少なく、各車両は自由な走行ができ渋滞していない様子を表す。 <http://www.guashan.com/photo/jiaotong.html> より：赤色と青色の枠等を挿入した。

交通流は大きく分けて、渋滞している状態と渋滞していない状態に分けられる。つまり、道路上に存在する車両数（厳密には車両密度）で区別できる渋滞-非渋滞は、相転移現象と見なせる。ここで、各車両を粒子と見なし、相転移現象等を含む交通流を統計集団の振る舞いとして考察する時、交通流は統計物理学の対象とする自然現象の1つと考えることができる<sup>2)</sup>。他にも、交通流そのものを連続体と見なし、解析することもある<sup>3) 4)</sup>。この時、交通流は連続体力学の範疇に入るのだ。つまり、交通流は相転移現象等の物理学的性質を持ち、物理学的研究手法を用いて解析できるものであり、物理学の範疇に入るのだ。交通流が物理学的対象であることを明示するために「交通物理」と呼ぶこともある。[1.4節-1.7節を参照のこと]

交通流の物理学的性質は渋滞-非渋滞だけでない。交通流に含まれる車両集団の車両の速度が同一、あるいはほとんど同一と見なせるような「速度がシンクロした状態」も存在するのではないかと考えられている。この考えはKernerが提唱し、彼の理論は三相交通理論 (Three-phase traffic theory) と呼ばれる<sup>5) 6)</sup>。[第2章を参照のこと]

## 1.2 交通流で用いられる物理量

交通流の現象で用いられる物理量について説明しよう<sup>7)</sup>。交通流の現象を解析するのに用いられる基本的な物理量は、**交通量**と**車両密度**（あるいは単に**密度**）と**平均速度**の3つである。まずは**交通量** (volume) を説明しよう。交通量は、道路上に観測点を決め、ある時間内にその観測点を通過する車両数で定義される。つまり、観測時間を  $\Delta t$  とし、その観測時間内に観測点を通過する車両数を  $\Delta m$  と定義すれば、 $\Delta t$  時間交通量  $\Delta Q$  は

$$\Delta Q = \Delta m \quad (1.1)$$

と表される。交通量は観測時間毎に異なる値を示すので、 $\Delta t$  時間交通量  $\Delta Q$  を観測時間  $\Delta t$  で規格化する。ここで新しい物理量を定義しよう。交通量を単位時間あたりに換算したものを**交通流率** (flowあるいはflow rate) と呼ぶことにすると、交通流率  $q$  は

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (1.2)$$

と書き表される。

次に**密度**を定義しよう。密度は道路上の単位長さあたりの車両数で定義される。つまり、道路の長さを  $\Delta L$  とし、道路上に含まれる車両数を  $\Delta m$  とすると、密度  $\rho$  は

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta L} \quad (1.3)$$

と書き表される.

次に**平均速度**を定義しよう. 平均速度の定義は2種類存在する. 時間についての平均速度を時間平均速度  $\bar{v}_{\text{time}}$  と呼び, 空間についての平均速度を空間平均速度  $\bar{v}_{\text{space}}$  と呼ぶことにしよう. 時間平均速度  $\bar{v}_{\text{time}}$  は, 観測時間  $\Delta t$  内で観測点を通過する車両の速度の平均で定義される. また, 空間平均速度  $\bar{v}_{\text{space}}$  は道路上の一定区間内に存在する車両の平均速度で定義される. 空間平均速度  $\bar{v}_{\text{space}}$  と交通流率  $q$  と密度  $\rho$  について,

$$q = \rho \bar{v}_{\text{space}} \quad (1.4)$$

という関係式が存在する. ここで, 周期境界条件を課した道路 (閉じた道路) の交通流が定常状態である時は, 時間平均速度  $\bar{v}_{\text{time}}$  と空間平均速度  $\bar{v}_{\text{space}}$  は等しくなることに注意しよう.

次に**車間距離** (headway distance) を定義しよう. 各車両に番号を振ろう.  $i$  番目の車両の前方を走る車両を  $i+1$  番目としよう. 車間距離は  $i$  番目の車両の先頭と  $i+1$  番目の車両の後端との距離で定義される. また, 車頭距離は,  $i$  番目の車両の先頭と  $i+1$  番目の車両の先頭との距離で定義される. ここで, 車両の大きさを無視し, 質点のように扱う時は, 車間距離と車頭距離は等しくなることに注意しよう.

### 1.3 基本図

密度と交通流率の関係を表す Fig. 1.2 のようなグラフは**基本図** (fundamental diagram) と呼ばれる. この図は横軸が密度で, 縦軸が交通流率を表す. 基本図 Fig. 1.2 を見ると, 低密度 (赤色の枠) の場合, 密度の増加とともに交通流率がほとんど直線状に上昇し, 高密度 (青色の枠) の場合, 密度の増加とともに交通流率は減少する. その理由は, 低密度の時は渋滞が生じず, 高密度の時は渋滞が発生しているからである.

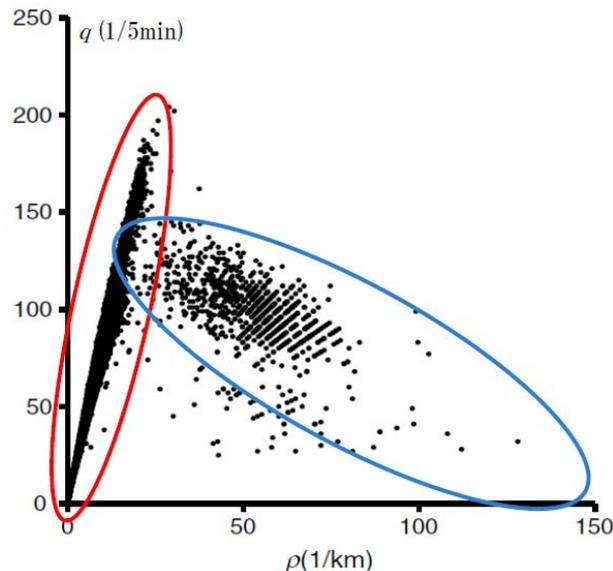


Fig. 1.2: 密度と交通流率の関係を示す典型的な基本図. (高速道路上の観測点における1ヶ月間の観測データを用いている.) 臨界密度は約25(車両/km)である. データは日本道路公団により観測されたものである. 赤色の枠は密度に比例して増加する交通流率の領域を表し, 青色の枠は密度の増加とともに減少する交通流率の領域を表す. 参考文献<sup>1)</sup>より: 赤色と青色の枠等を挿入した.

EdieはGreenbergの流体力学モデル<sup>8)</sup>から得られる交通流率と密度の関係式を用いて, 実験データのフィッティングをした. 低密度と高密度で異なるパラメータを用いてフィッティングしなければならず, Edieは交通流率が低密度と高密度では異なる状態であることを指摘した<sup>9)</sup>. 他のモデルでも, 実験データのフィッティングをする研究が行われた<sup>10)</sup>.

基本図を再現するモデルはいくつか知られている. 交通流への理論的なアプローチには, 交通流を連続体と見なすマクロなアプローチと, 各車両を個別に取り扱うミクロなアプローチが存在する. それぞれのアプローチを概説しよう. 次節以降から, マクロなアプローチとして流体力学モデルを紹介し, ミクロなアプローチとして追従モデル, 最適速度モデル, セルオートマトンモデルを紹介する. 本研究はセルオートマトンモデルを基礎としているので, 先を急ぐ方は1.7節へ飛んでもよい.

## 1.4 流体力学モデル

川の流れを調べるのに水分子の個々の運動から出発することが必ずしも必要ではない。同様に、交通流という対象を解析するのに必ずしも個々の車両の運動を考える必要はなく、流体力学などの連続体力学的視点から考察することもできる。

1955年に Lighthill と Whitham らが流体力学モデルを提唱した<sup>3) 4)</sup>。空間変数を  $x$  とし、時間変数を  $t$  とする。局所的な密度を  $k(x, t)$  とし、定常状態の局所的な交通流率を  $q(k, x)$  とすると、連続の式は

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

と書き表される。ここで、 $c(k, x) = \partial q / \partial k$  と定義すると、

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = c(k, x) \frac{\partial k}{\partial t} \quad (1.6)$$

の関係式が得られ、式 (1.6) を用いて式 (1.5) は

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c(k, x) \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.7)$$

と書き換えられる。式 (1.7) を基礎方程式とする Lighthill らの理論は kinematic wave 理論と呼ばれる。kinematic wave 理論では、交通流率  $q$  と密度  $k$  は空間変数  $x$  を引数に持つ関数で与えなければならない。このために、kinematic wave 理論のみでは、マクロな視点から交通流の基本図を再現できない。交通流を再現するためには他の理論が必要となる。他にも Navier-Stokes 方程式を基礎とした Kerner-Konhäuser モデルも知られている<sup>11)</sup>。

## 1.5 追従モデル

次にミクロなアプローチを紹介しよう。各車両を個別に扱うモデルとして追従モデルが存在する<sup>12) 13) 14) 15) 16) 17) 18) 19) 20) 21)</sup>。追従モデルとは、各車両に作用する力（あるいは、各車両の加速度）を考慮したモデルであり、実際の交通流を再現しようとしたモデルである。さて、これから追従モデルの基礎方程式を説明しよう。各車両が1次元状の道路上を離散的に点在している場合を考える。また、各車両がお互いに衝突したりしないとしよう。時刻  $t$  での  $i$  番目の各車両の位置を  $x_i(t)$  とし、 $i$  番目の車両の前方車両の位置を  $x_{i+1}(t)$  とすると、追従モデルの基礎方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x_i(t+T) = a \left\{ \frac{d}{dt} x_{i+1}(t) - \frac{d}{dt} x_i(t) \right\} \quad (1.8)$$

と書き表される．ここで， $a$ は感応度と呼ばれ，これは速度差に対してどの程度鋭敏に応答するかを示す指標であり， $T$ は $i$ 番目の運転手が直前方の車両の振る舞いに応答して自分の車両の運動制御をするのにかかる応答の時間遅れを表すことに注意しよう．つまり，運転手の応答の仕方は，前方車両と自分の車両の「速度差」に応じて，自分の車両を加速したり減速したりするというものである．

$T = 0$ の時を考えよう．この方程式は容易に積分でき，自明な結果しか得られない．しかし，このモデルの本質的な部分は $T \neq 0$ の時である． $T \neq 0$ の時，車両の制御は人間が行うので，反応が遅れるという状況が再現される．また応答の時間遅れ $T$ により自由な走行における不安定性が生じることは容易に理解できる．そこで，さらに感応度 $a$ に関して速度 $x_i$ と車間距離 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ の依存性も考慮された．つまり感応度は定数ではなく，状況や状態によりさまざまに変化するというを表す．しかし，多くのパラメータを導入することになり，状況毎にパラメータを切り替えて車両の運動に合わせるという作業が続けられ，複雑なモデルが数多く考案された<sup>21)</sup>．

他にも，車間距離を考慮に入れたモデルも考案された<sup>19)</sup>．その運動方程式は

$$\frac{d}{dt}x_n(t+T) = f(\Delta x_n(t)) \quad (1.9)$$

と書き表される．ここで $f$ は車間距離に依存した関数であることに注意する．この運動方程式も応答の時間遅れ $T$ を含む遅れ付き方程式となっている．しかし，式(1.8)は加速度を制御する方程式だが，式(1.9)は速度を直接制御する方程式である．この点は根本的な相違である．1960年代に指摘されたことだが，実際の車両の運動制御では車両の加速度を制御するのであって，速度が直接制御されるものではないということである<sup>22)</sup>．つまり，交通流の挙動を記述する車両運動の基礎方程式は，密度依存性を反映して加速度を制御する方程式であるべきだという主張である．

## 1.6 最適速度モデル

最適速度モデルとは，前方車両の振る舞いを考慮した1次元追従モデルである<sup>23) 24) 25)</sup><sup>26)</sup>．車の大きさは考慮せず，運転手や車両の性能もすべて同じとする．そして，交通流を記述するために各車両の持つルールは，車両同士の衝突を回避する（排除効果）ということと前方車両を追いかける（追従運動）ということである．つまり，最適速度モデルは，前方車両との車間距離が狭まると，運転している自分の車両を減速させるということを表

す. このコンセプトを簡単な数学的表現で書き表したものが, 次の基礎方程式である.

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n(t)}{dt} \right\} \quad (1.10)$$

ここで,  $V(\Delta x)$  は前方車両との車間距離によって運転をどのように制御するかを表す関数であり, OV (Optimal Velocity) 関数と呼ばれる. OV 関数は車間距離に応じた**最適速度 (安全速度)**を与えるのだ. つまり, 各運転手が共通の交通ルールとして最適速度の指標を持っているということの意味する.

最適速度は, 車間距離が小さければ小さく取るべきで, 車間距離が大きければ大きく取っても問題ない. しかし, 実際は速度制限や車の性能のため, いくらでも大きく取ることができないので, 最高速度が存在するであろう. 従って, OV 関数は車間距離に対して**単調増加関数**であり, 車間距離が無限大の時に最大速度  $v_{\max} = V(\Delta x_n \rightarrow \infty)$  に漸近する形である. また, 車間距離が小さい時は衝突しないように徐々に加速すべきであろう. これらの条件は, 現実の運転の仕方を反映した自然なものである. 以上を満たす簡単な関数として, 例えば  $V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - c) + \tanh c$  を選択することができるだろう. ここで  $c$  は定数であることに注意する.

## 1.7 セルオートマトンモデル

セルオートマトンモデルとはすべての物理量を離散量として扱い, 時間発展を含む動的な振る舞いを記述することができるモデルであり<sup>27) 28)</sup>, 交通流などに応用される. まず, 1車線道路を  $N$  個に等分割する場合を考えよう. 等分割された各々の領域をセルと呼ぶ. それらのセルに番号を振り, 順番にセル1, セル2, セル3... と名前を振ればよい. それぞれのセルには状態 (情報) が張り付いている. セルの状態には, 車両が存在するかしないかという情報や車両速度の情報が含まれる.

各セルに張り付いた状態の時間発展を考えよう. 離散化された単位時間経過毎に自分自身とその近傍のセルの状態に依存して, 次のセルの状態が決定されるという単純なルールをすべてのセルに対して実行するが, このような状態更新は, 車両の前進などを表せるのだ. 本論文では, このセルオートマトンモデルを手段として扱い, 交通流の解析を行う. [第3章と第4章を参照のこと]

マクロとミクロの両方において, 交通流モデルは多数存在する. 交通流の物理学的性質を解析するにあたり, 本研究では車両の速度に注目するため, 各車両の速度を明確に区別できるモデルの1つであるセルオートマトンモデルを用いる.

## 第2章 三相交通理論とシンクロ流

### 2.1 三相交通理論

交通流の現象は、時空間上の車両の動的な振る舞いと関連がある<sup>29) 30)</sup>。Fig. 2.1のような時空間上の車両の軌跡を表すグラフは時空図 (Space time diagram) と呼ばれる。Fig. 2.1は、横軸が時間で縦軸が車両の位置を表し、黒い線は1台の車両の運動を表す。時空図は直接的に車両の渋滞現象の発生を解析したり、密度の粗密波の伝搬現象を調べたりするのに用いられる。Fig. 2.1を見ると、1つの密の波が発生し、時間の経過とともに密の波が車両の進行方向とは逆向きに進むことが分かる。

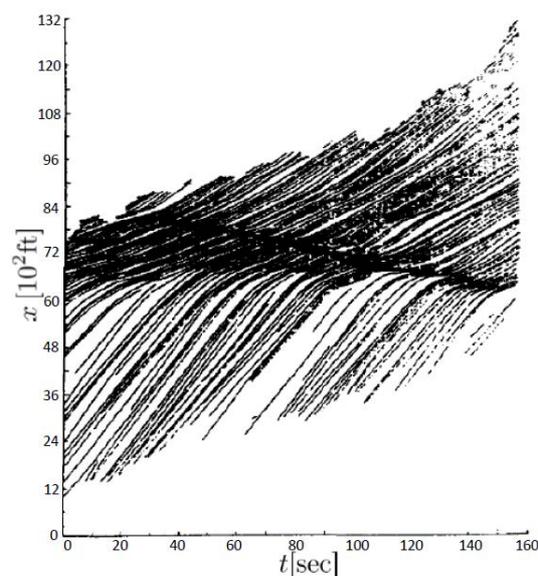


Fig. 2.1: 車両の軌跡を示す時空図 (Space time diagram)。グラフはアメリカの高速道路を空中から撮影して得られたもので、横軸が時間で縦軸が位置を表し、縦軸の正方向に車両が進行する。黒い線は1台の車両の運動を表す。渋滞が発生し、渋滞が車両の進行方向とは逆向きに進む様子が見られる。(参考文献<sup>29)</sup>より：縦軸と横軸のラベル位置を変更し、軸の数字を打ち直した。)

交通流は自由流 (Free flow) と密集流 (Congested flow, あるいは Congested traffic) の2つの相から構成される。更に、Kernerにより密集流は異なる2つの相に区別されることが指摘された<sup>5) 6) 31)</sup>。つまり、密集流はシンクロ流 (Synchronized flow) と渋滞流 (Wide

moving jam) に区別されるのだ。交通流を自由流・シンクロ流・渋滞流の3つの相に区別する理論は、三相交通理論 (Three-phase traffic theory) と呼ばれる。異なる3つの相について説明しよう。交通流に含まれる車両集団について、次のように記述できる。

- 自由流：車両が希望する速度で走ることができる状態
- シンクロ流：車両が厳密に、あるいはほとんど同じ速度で走る状態
- 渋滞流：停止している車両が存在している状態

ここで、異なる3つの相は、速度  $v$ ・密度  $\rho$ ・交通流率  $q$  の3つの物理量を用いて区別されることに注意しよう。

## 2.2 自由流と密集流

各相の説明をするために、Fig. 2.2のような基本図の概念図を考えよう。この図は、横軸は密度で縦軸は交通流率を表している。密度と交通流率の関係を示す基本図は、大きく分けて2つの領域に区別される。基本図において低密度の時、正の傾きを持つ直線上に乗る点の集団が自由流に相当する。自由流においては、車両同士の相互作用が無視でき、大きな速度の落ち込みが無いために、交通流率はほとんど密度に比例することになるのだ。しかし、密度が増加するにつれて、車両同士の相互作用が無視できなくなる。つまり、密度が増すにつれて、車両の速度が下がり、基本図の直線の傾きが下がる傾向にあるのだ。そして、密度が自由流の最大密度に到達した時、自由流から密集流への相転移が起きるのだ。

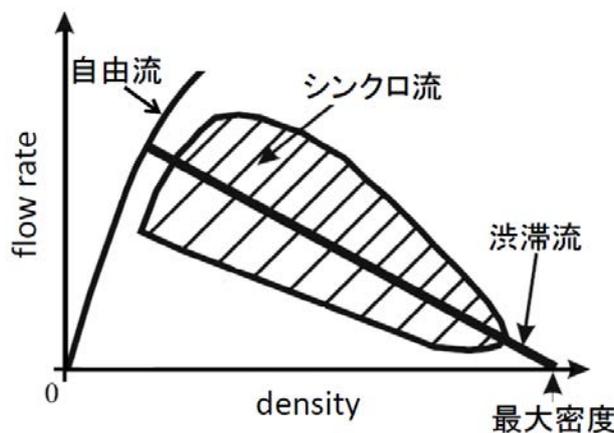


Fig. 2.2: 基本図の概念図。横軸は密度で縦軸は交通流率を表す。低密度領域で、密度にほとんど比例する部分が自由流を表し、斜線の密度領域の部分がシンクロ流を表し、渋滞流は負の傾きを持つ直線上に乗る。(参考文献<sup>6)</sup>より：縦軸と横軸のラベル等を変更した。)

自由流を表す点以外の他の点の集団は、密集流と一致する。ほとんどの場合、密集流はボトルネック（道が狭くなっている場所）で生じたり、あるいは密度が高い場合に生じるのだ。密集流では、自由流に比べて車両の平均速度は下がる。また、密集流を表す点の集団の分散は、自由流の点の分散よりも大きいのだ。密集流は自由流の可能な最低平均速度より低い平均速度を持つ状態なのだ。このように基本図を用いて、自由流と密集流は直観的に区別できる。

## 2.3 シンクロ流

密度が増加すると、自由流から密集流へ相転移する。この時、交通流は、自由流からシンクロ流へ相転移するのだ。このように、自由流からシンクロ流への相転移 (F → S phase transition) はブレイクダウン現象 (Breakdown phenomenon) と呼ばれる。シンクロ流の車両の速度は、自由流に比べて著しく落ちるが、速度が減少しても密度が増加するために、シンクロ流の交通流率は著しく変化しないことが観測される<sup>5)</sup>。また、基本図において、シンクロ流における点の集団の分散は大きい。つまり、基本図における密集流の大きな分散を持つ領域はシンクロ流を表す。

シンクロ流について、1つの実験的性質を考えよう。Kernerらはボトルネックを含んだ道路上で、検出器を用いて車両速度を計測し、その1分間平均を取った速度をプロットした<sup>32)</sup>。このようにプロットされた観測データが Fig. 2.3 である。この図は横軸が時間で縦軸が位置を表し、高さは車両の速度を表す。ここで、各車両は縦軸の正の方向に進行することに注意しよう。赤色の枠に含まれる領域は速度がほとんど0であり、低速度領域が車両の進行方向とは反対向きに進む。この領域が渋滞流を表す。また、黄色の枠の中にある破線がボトルネックを表す。ボトルネック近傍を表す黄色の枠の領域では速度の減少があり、ボトルネックを挟んでシンクロ流と自由流の境界位置は固定される。

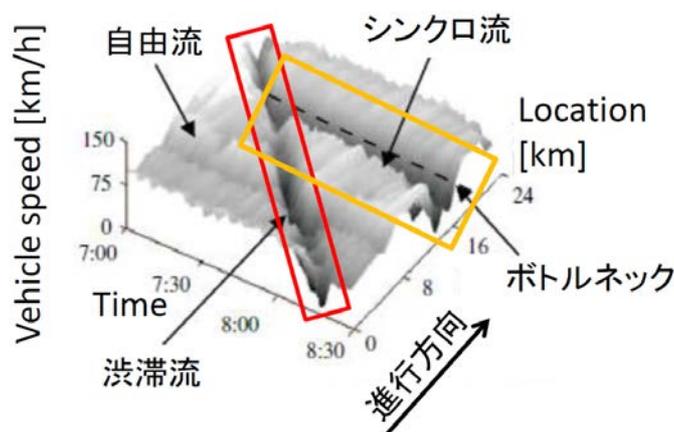


Fig. 2.3: 1分間平均された速度の時空間における観測データ。横軸が時間で縦軸が位置を表し、高さは車両の速度を表す。赤色の枠は渋滞流で、黄色の枠の中にある破線はボトルネックを表す。ボトルネック近傍では速度が下がり、ボトルネックを挟んで、シンクロ流と自由流の境界位置は固定される。また、渋滞流が進行方向とは反対向きに進むことが分かる。(参考文献<sup>32)</sup>より：ラベル等を変更し、赤色と黄色の枠を挿入した。)

Fig. 2.3 を元にして、3つの相の観点から書き直した図が Fig. 2.4 である。この図は横軸が時間で縦軸が位置を表す。ここで、各車両は縦軸の正の方向に進行することに注意し

よう。黒色の線は7時30分に出発した車両の軌跡を表現している。緑色の領域は自由流で、黄色の領域はシンクロ流で、赤色の領域は渋滞流を表す。また、青色の枠に含まれる破線はボトルネックである。Fig. 2.3と同様に、赤色の渋滞流が車両の進行方向とは逆向きに進むのが分かり、また青色の枠で囲まれたボトルネックを挟んで黄色のシンクロ流と緑色の自由流との境界位置が固定されていることが分かる。このように、シンクロ流と自由流の境界がボトルネックで固定されるというシンクロ流の性質の1つが見て取れる。

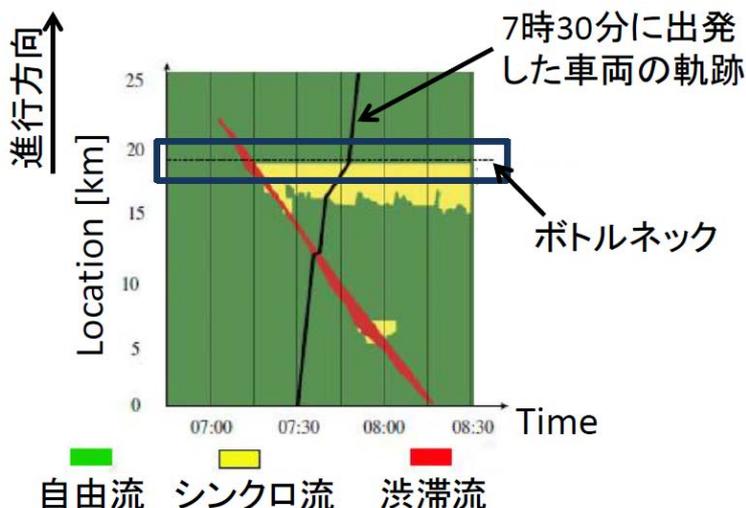


Fig. 2.4: 速度の観測データである Fig. 2.3 に基づく時空間上の3つの相。横軸が時間で縦軸が位置を表す。また、緑色は自由流、黄色はシンクロ流、赤色は渋滞流を表す。黒色の線は7時30分に位置 [0km] を出発した車両の軌跡を表す。青色の枠に含まれる破線はボトルネックを表す。青色の枠で囲まれたボトルネックを挟んで、黄色のシンクロ流と緑色の自由流との境界位置は固定される。また、赤色の渋滞流が車両の進行方向とは反対向きに進むことが分かる。(参考文献<sup>32)</sup>より：ラベル等を変更し、青色の枠を挿入した.)

## 2.4 渋滞流

密度が増加すると、シンクロ流から渋滞流へ相転移する。交通流がシンクロ流から渋滞流へ相転移する時、速度と交通流率が著しく減少する。また、渋滞流において、実際に車両の密度が密になっている領域が車両の進行方向とは反対方向に伝搬する。基本図において、渋滞流の点の集団の分散はシンクロ流の分散に比べて小さく、渋滞流の点は負の傾きを持つ直線上に乗るのだ。この直線の傾きは伝搬速度のパターンに一致する<sup>32)</sup>。

## 第3章 セルオートマトンモデルを用いた交通流の解析

### 3.1 Nagel-Schreckenberg モデル (NaSch モデル)

交通流の物理学的研究が盛んになる契機を作ったのは、1992年に発表された Nagel と Schreckenberg によるセルオートマトンモデルである<sup>2) 33) 34) 35)</sup>。セルオートマトンモデルとは、空間をセルと呼ばれる小領域に区分けして、すべての物理量を離散量として扱い、離散化された単位時間経過毎に各物理量を更新するモデルである。離散化された単位時間経過毎に自分自身とその近傍のセルの状態に依存して、次の時刻のセルの状態が決定されるという単純なルールをすべてのセルに対して実行する。この更新ルール（運動ルール）は次節で説明しよう。このモデルは Nagel-Schreckenberg モデル (NaSch モデル) と呼ばれる。NaSch モデルは制限速度（最大速度）のある1車線道路上で各車両の運動を追跡する離散化された交通流モデルなのだ。次節以降で、このモデルは渋滞-非渋滞相転移現象を再現することが示される。

### 3.2 NaSch モデルの運動ルール

NaSch モデルは多種多様な変更や拡張をされたり<sup>36)</sup>、道路網に応用されたりした。これらのモデルを評価する第1の基準は、車両の運動ルールから導かれる交通流の実験的特徴を再現する可能性を持つかどうかである。NaSch モデルを説明しよう。まず、1車線道路を考えよう。NaSch モデルにおいて、道路は1次元的に並べられたセルの配列としてモデル化される。また、各セルには1台の車両が占有するかしないかの2通り存在するのだ。さて、各車両に番号を割り振ろう。初期配置として、各車両は1車線道路上の任意のセルに配置される。時刻  $t$  の時の  $i$  番目の車両の位置を  $x_t^i$  と置き、時刻  $t$  の時の  $i$  番目の車両の前方車両である  $i+1$  番目の車両の位置を  $x_t^{i+1}$  と置く。

次に、各車両の運動ルール（セルの状態更新ルール）を定めよう。ルールに従って、各車両は0から最大速度  $v_{\max}$  までの整数で表される速度を持つことに注意しよう。時刻  $t$  の

時の  $i$  番目の車両の速度を  $v_t^i$  とし、時刻  $t+1$  の時の  $i$  番目の速度を  $v_{t+1}^i$  とする。また、区間  $[0, 1]$  の一様乱数を  $\xi$  とし、車間距離を  $\delta_t^i = x_t^{i+1} - x_t^i$  と置くと、運動ルールは

1. もし  $v_t^i < v_{\max}$  かつ  $v_t^i + 1 < \delta_t^i$  であるならば、時刻  $t+1$  の速度は  $v_{t+1}^i = \min(v_t^i + 1, v_{\max})$  と変更される。
2. もし  $\delta_t^i \leq v_t^i$  であるならば、時刻  $t+1$  の速度は  $v_{t+1}^i = \min(\delta_t^i - 1, v_t^i)$  と変更される。
3. 確率を  $p$  としよう。もし  $v_{t+1}^i > 0$  かつ  $\xi \leq p$  であるならば、時刻  $t+1$  の速度は  $v_{t+1}^i = \max(0, v_{t+1}^i - 1)$  と変更される。
4. 更新された速度  $v_{t+1}^i$  を用いて、時刻  $t+1$  の  $i$  番目の車両の位置は  $x_{t+1}^i = x_t^i + v_{t+1}^i$  となる。

と書き表される。4つの運動ルールはすべての車両に対して平行に適応される。つまり、各車両の加速や減速などの動的振る舞いは、道路上の前方車両の振る舞いに依存するのだ。NaSchモデルの注目すべき点は、加速と減速という概念が含まれることにある。実際の交通の流れを考えてみよう。止まっていた車両は徐々に加速するし、現在動いている車両は何らの原因により減速するといった挙動を見せる。NaSchモデルは、実際の車両の運動を単純な規則を用いて表現しているモデルなのだ。Nagelらは閉じた系や開いた系にNaSchモデルを適用した。

### 3.3 NaSch モデルのシミュレーション

NaSch モデルのシミュレーション結果を考える．まず，密度が低い場合の時空図である Fig. 3.1 を見てみよう．この図は横軸が位置で縦軸が時間を表す．Fig. 3.1 は，密度が 0.03 における時空間上の各車両の軌跡を表す．このグラフの数字は各車両の速度を表し，点 (·) は車両が存在しないことを表す．また，時間が更新される毎に，各車両が前進している様子が見られる．Fig. 3.1 において，各車両はほとんど自由な走行ができており，各車両の運動はほとんど妨げられていない．つまり，渋滞が発生していないことが分かる．

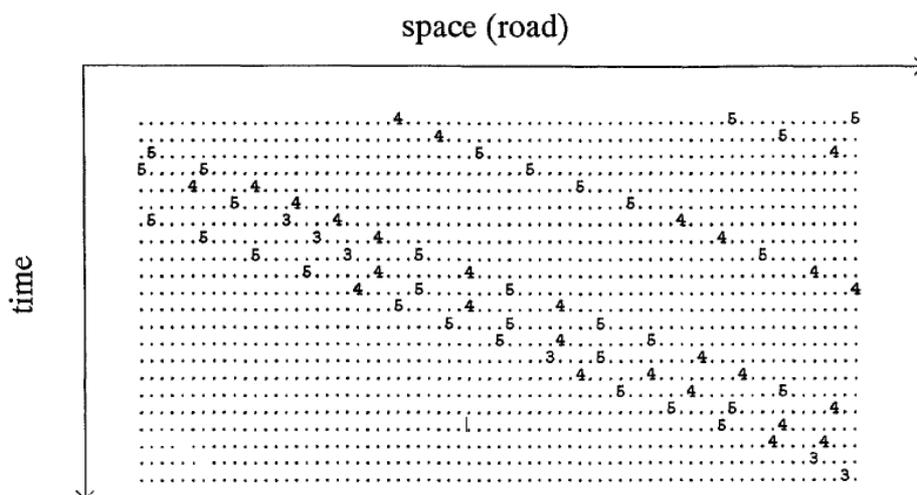


Fig. 3.1: NaSch モデルにおける低密度時（密度 0.03）の各車両の軌跡を表した時空図．横軸が位置で縦軸が時間を表す．図中の数字は各車両の速度を表し，点 (·) は車両が存在しないことを表す．低密度の時は，各車両の運動がほとんど妨げられず，渋滞が発生していないことが分かる．参考文献<sup>2)</sup>より抜粋．

次に密度が高い場合の各車両の軌跡を考えよう. Fig. 3.2は密度0.1における時空図である. この図は横軸が位置で縦軸が時間を表す. 図中の数字は各車両の速度を表し, 点 (.) は車両が存在しないことを表す. この図において, 黄色の枠は車両の減速を表し, 青色の枠は車両の加速を表す. 車両の減速については, 速度が1ずつ減少するだけでなく黄色の枠のように速度変化が1以上の場合も存在する. 青色の枠を見ると, 車両の加速については速度が1ずつ増加していることが理解できる. この図の赤色の枠を見ると, 速度と車間距離が減少して直前方の車両の後方について停止するという渋滞現象が生じ, 車両の進行方向とは逆向きに密度の密な部分が伝搬していることが分かる.

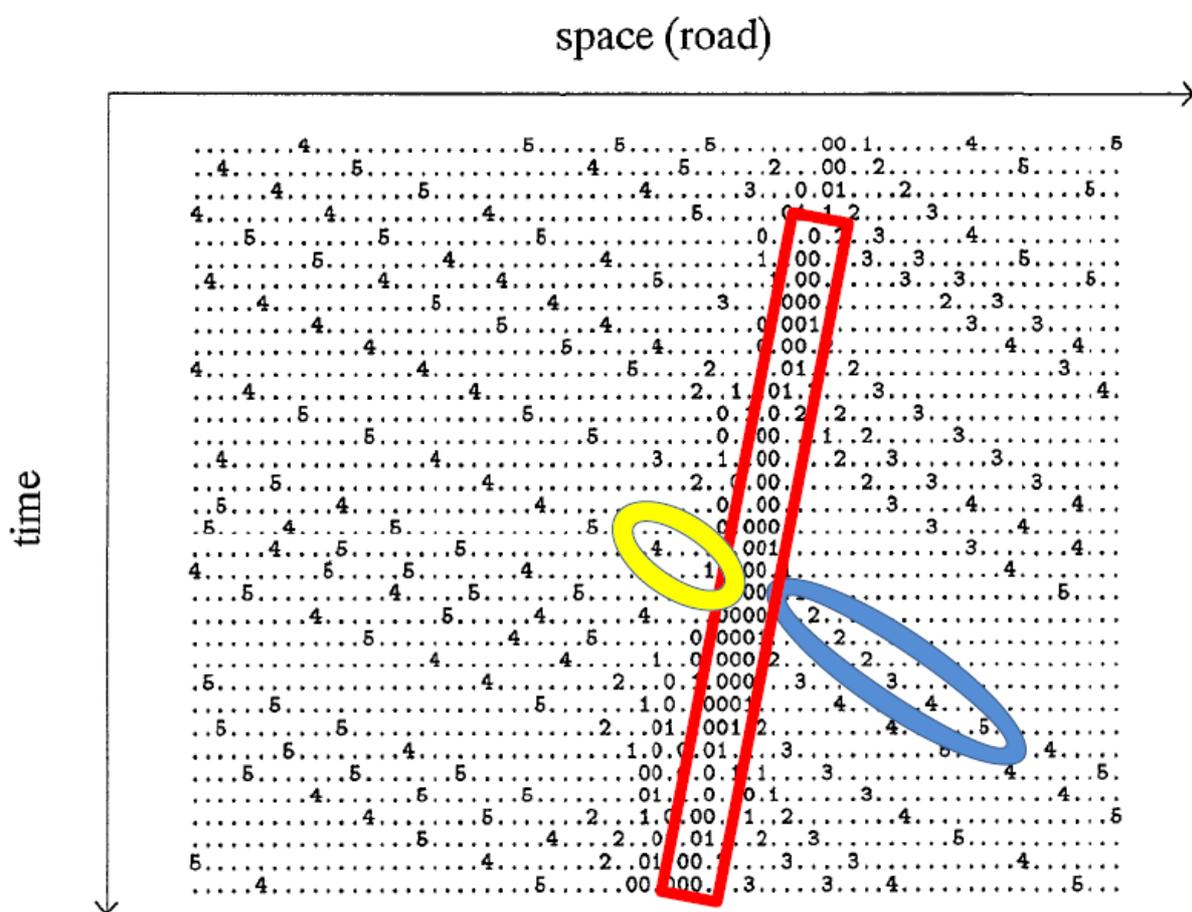


Fig. 3.2: NaSch モデルにおける高密度時 (密度0.1) の各車両の軌跡を表した時空図. 横軸が位置で縦軸が時間を表す. 図中の数字は各車両の速度を表し, 点 (.) は車両が存在しないことを表す. 赤色の枠を見ると渋滞現象が生じ, 車両の進行方向とは逆向きに密度の密な部分が伝搬していることが分かる. 黄色の枠の部分は車両が減速していることを表し, 青色の枠は車両が加速していることを表す. 参考文献<sup>2)</sup>より: 赤色の枠と黄色の枠と青色の枠を挿入している.

NaSch モデルにおける交通流率と密度の関係を考えよう。系の大きさが  $10^4$  である時の NaSch モデルの基本図は Fig. 3.3 である。この図は横軸が密度で縦軸が交通流率を表す。Fig. 3.3 の点は 100 時間ステップの平均を表し、線は  $10^6$  時間ステップの平均を表す。Fig. 3.3 を見ると、密度が約  $\rho = 0.08$  の時に、非渋滞状態から渋滞状態への移り変わりが生じていることが分かる。NaSch モデルの結果から、渋滞-非渋滞は相転移現象として理解できることが分かる。つまり、NaSch モデルは渋滞-非渋滞相転移現象を再現するモデルなのだ。NaSch モデルの運動ルールは単純であるが、現実の解析にも十分適用可能であり、ヨーロッパを中心に基本的なモデルとして広く用いられている。

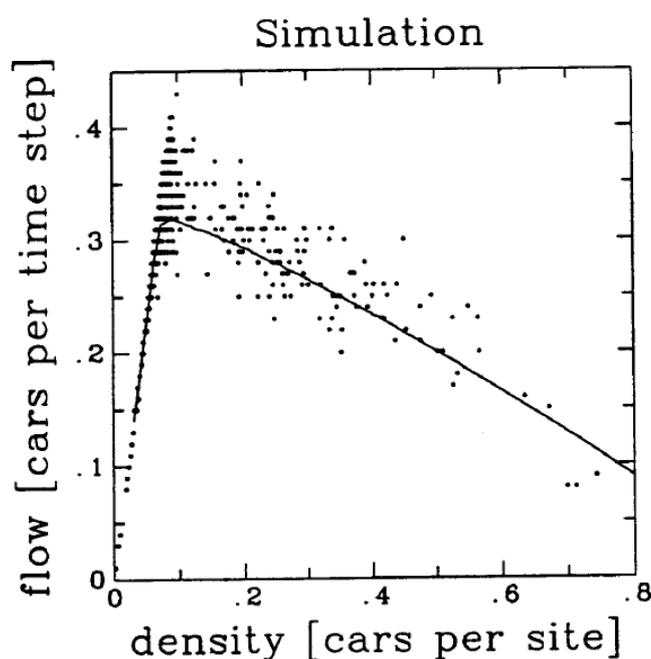


Fig. 3.3: NaSch モデルの基本図. 横軸が密度で縦軸が交通流率を表す。系の大きさは  $10^4$  で、点は 100 時間ステップの平均であり、線は  $10^6$  時間ステップの平均を表す。参考文献<sup>2)</sup>より抜粋。

### 3.4 修正 NaSch モデル (mNaSch モデル)

シンクロ流を再現するモデルはいくつか提唱されてきたが、それらは複雑な規則を含むものであり<sup>37) 38) 39)</sup>、シンクロ流の生じる本質的な機構は完全には明らかにされていない。このような状況の下、Chmura らはシンクロ流を再現する単純で確率的なセルオートマトンモデル (mNaSch モデル) を提案した<sup>40)</sup>。このモデルは、交通流の各車両が互いに衝突しないように、(a) 車間距離が広がれば許容される速度を増大し、(b) 車間距離が狭まれば速度を落とす、このような速度基準 (安全速度) を各車両が知っているという、現実の交通流における自然な規則を取り入れたものである。mNaSch モデルは、このような修正を NaSch モデルに施すことで得られる。mNaSch モデルは、NaSch モデルと同様に制限速度 (最大速度) のある 1 車線道路における交通流の特徴を再現するモデルなのだ。

### 3.5 mNaSch モデルの運動ルールとシミュレーション

mNaSch モデルの運動ルールを説明しよう。時刻  $t$  の時、 $i$  番目の車両の位置と速度をそれぞれ  $x_t^i$  と  $v_t^i$  と置く。ここで、各車両の位置と速度は NaSch モデルと同じように整数値であることに注意する。また、各車両の最大速度は同一の整数値  $v_{\max}$  とし、時刻  $t$  の車間距離は  $\delta_t^i = x_t^{i+1} - x_t^i$  と書き表されることに注意して、関数  $\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  を導入しよう。mNaSch モデルにおいて、導入した関数  $\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  は

$$\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{1}{2} \sqrt{8\delta_t^i - 7 + 4v_t^{i+1}(v_t^{i+1} - 1)} - \frac{1}{2} \right\rfloor; v_{\max} \right\} \quad (3.1)$$

と定義される。ここで  $\lfloor \cdot \rfloor$  は床関数を表すことに注意しよう。速度  $v_t^i$  は  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  によって制限されているとする。  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  は速度  $v_t^i$  の上限値であり、各車両の速度基準と見なして良いだろう。つまり  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  は各車両が衝突しないための安全速度と見なせるのだ。ここで、安全速度  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  は時刻  $t-1$  の車間距離  $\delta_{t-1}^i$  と  $i$  番目の直前方車両である  $i+1$  番目の車両の速度  $v_{t-1}^{i+1}$  に依存していることに注意しよう。

次に、各車両の運動ルールを定めよう。加速確率を  $p_{\text{acc}}$  とすると、運動ルールは

$$v_t^i = \begin{cases} v_{t-1}^i + 1 & \text{if } v_{t-1}^i + 1 \leq \mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) \text{ and } \xi \leq p_{\text{acc}} \\ v_{t-1}^i & \text{if } v_{t-1}^i + 1 \leq \mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) \text{ and } \xi > p_{\text{acc}} \\ \mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.2)$$

と表される。ここで、区間  $[0,1]$  の一様乱数を  $\xi$  とし、更新される速度  $v_t^i$  は  $v_{t-1}^i - 1 \leq v_t^i \leq v_{t-1}^i + 1$  の範囲内に収まることに注意しよう。従って、各車両の加速と減速の能力には限

界があり、1時間ステップあたり速度はせいぜい $\pm 1$ しか変化しない。運動ルールはすべての車両に平行に適応され、時刻 $t$ の $i$ 番目の車両の位置は $x_t^i = x_{t-1}^i + v_t^i$ となる。

安全速度が後述する関係式を満たす時、次の定理1により任意の2台の車両は衝突しないことが示されるのだ。つまり、次の定理1により mNaSch モデルは衝突の無い1車線道路の交通流モデルであることが分かる。

**定理 1** 次に述べる Table 3.1 から得られる関係式 (3.4) と mNaSch モデルの運動ルールを用いる時、任意の時刻 $t$ で任意の2台の車両が衝突しない。つまり、 $i, j$ 番目の車両の位置をそれぞれ $x_t^i, x_t^{i+1}$ とする時、

$$x_t^i < x_t^{i+1} \quad (3.3)$$

が成り立つ。ここで、 $i < j$ であることに注意しよう。

Table 3.1: 最大速度 $v_{\max} = 6$ に対する安全速度 $\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$ の値。この表は参考文献<sup>40)</sup>の Table 1 と同じ数値を示している。

$v_t^{i+1} \quad \delta_t^i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20	21	$\geq 22$
<b>0</b>	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6
<b>1</b>	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6
<b>2</b>	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
<b>3</b>	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
<b>4</b>	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6
<b>5</b>	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
<b>6</b>	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

### 定理 1 の証明

最大速度が  $v_{\max} = 6$  の場合を考えよう. Table 3.1 が衝突の無い交通を保障することを Herz が発見し, 式 (3.1) が Table 3.1 の値を再現することに Knorr は気づいた<sup>a</sup>. Table 3.1 の数値を用いて

$$\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (3.4)$$

という関係式が得られる. そして, 車間距離の関係式  $\delta_t^i = x_t^{i+1} - x_t^i$  と安全速度の関係式  $v_t^i \leq \mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  を用いて,

$$x_t^i = x_{t-1}^i + v_t^i \leq x_{t-1}^i + \mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < x_{t-1}^{i+1} + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (3.5)$$

が導かれる. ここで, 各車両の位置の更新についての関係式は

$$x_t^i = x_{t-1}^i + v_t^i \quad (3.6)$$

と書き表されることに注意しよう. 速度について2通りに場合分けしよう. まず, 速度が  $v_{t-1}^{i+1} = 0, 1$  の時を考えよう. 各車両は前進または停止しか行わないので, 式 (3.6) は

$$x_{t-1}^{i+1} \leq x_{t-1}^{i+1} + v_t^{i+1} = x_t^{i+1} \quad (3.7)$$

と表されるので, 式 (3.5) は

$$x_t^i < x_{t-1}^{i+1} \leq x_t^{i+1} \quad (3.8)$$

と書き表される. 次に,  $v_{t-1}^{i+1} = 2, 3, 4, 5, 6$  の時を考えよう. 速度についての関係式は

$$v_{t-1}^{i+1} - 1 \leq v_t^{i+1} \leq v_{t-1}^{i+1} + 1 \quad (3.9)$$

と表されることに注意し, 式 (3.6) を用いて式 (3.5) の最右辺は

$$x_{t-1}^{i+1} + v_{t-1}^{i+1} - 1 \leq x_{t-1}^{i+1} + v_t^{i+1} = x_t^{i+1} \quad (3.10)$$

と表される. 従って, 式 (3.5) は

$$x_t^i < x_{t-1}^{i+1} + v_{t-1}^{i+1} - 1 \leq x_t^{i+1} \quad (3.11)$$

と書き表される. つまり, 速度  $v = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  に対して

$$x_t^i < x_{t-1}^{i+1} + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \leq x_t^{i+1} \quad (3.12)$$

という不等式が成り立つのだ. 従って, 安全速度  $\mu$  が式 (3.4) を満たせば, 一般性を失わずに  $x_t^i < x_t^{i+1}$  という関係式が得られた. 式 (3.12) より任意の時刻における任意の2台の車両が衝突しないことが示された.

<sup>a</sup>本章で扱う mNaSch モデルの著者の一人である Florian Knorr 博士に直接連絡を取り, 事実確認を行った.

mNaSch モデルは閉じた系と開いた系に対して適応される． mNaSch モデルの計算条件を説明しよう． 1 車線道路を表すのに用いるセルの数は  $L = 10^4$  であり， 最大速度は  $v_{\max} = 6$  である． 車両数を  $M$  とすると， 密度は  $\rho = M/L$  と定義される． ここで， 密度は  $0.01 \leq \rho \leq 1$  の範囲に存在し， 密度の刻み幅は 0.01 であることに注意しよう． また， シミュレーション結果を得るために事前に行う緩和計算として，  $T = 10L = 10^5$  時間ステップだけ計算を進めておく． その後， 更に  $\Delta T = L = 10^4$  時間ステップだけ計算を行い， 各物理量を  $\Delta T$  時間ステップを用いて平均化するのだ．

mNaSch モデルの各加速確率に対する基本図は Fig. 3.4 のグラフ a であり， 平均速度の変化は Fig. 3.4 のグラフ b である． グラフ a は横軸が密度で縦軸が交通流率を表し， グラフ b は横軸が密度で縦軸が平均速度を表す． グラフ b を見ると， 密度の増加とともに平均速度が減少していることが分かる． さて， グラフ a を考えよう． まずは低密度の場合を考えよう． グラフ a を見ると加速確率が  $p_{\text{acc}} = 0.9$  の時は NaSch モデルと同様に， 臨界密度  $\rho_{p_{\text{acc}}} \approx 0.1$  に到達するまでは， 交通流率は密度の増加に比例して増加している． このように交通流率が増加する理由は， 密度が  $\rho < \rho_{p_{\text{acc}}}$  の時， すべての車両が最大速度  $v_{\max}$  まですべて加速することができるからだ． 従って， 交通流率は  $J = \rho \cdot v_{\max}$  によって与えられる． ここで， この領域が自由流を表していることに注意しよう． 次に， 高密度の場合を考えよう． 基本図のグラフ a を見ると加速確率が  $p_{\text{acc}} > 0.5$  の時， 交通流率は密度の増加に伴い単調に減少するのではなくピークを持つ． ピークが存在する密度領域について考えよう． ピークが存在する高密度領域では mNaSch モデルの振る舞いは， NaSch モデルの振る舞いと異なるのだ．

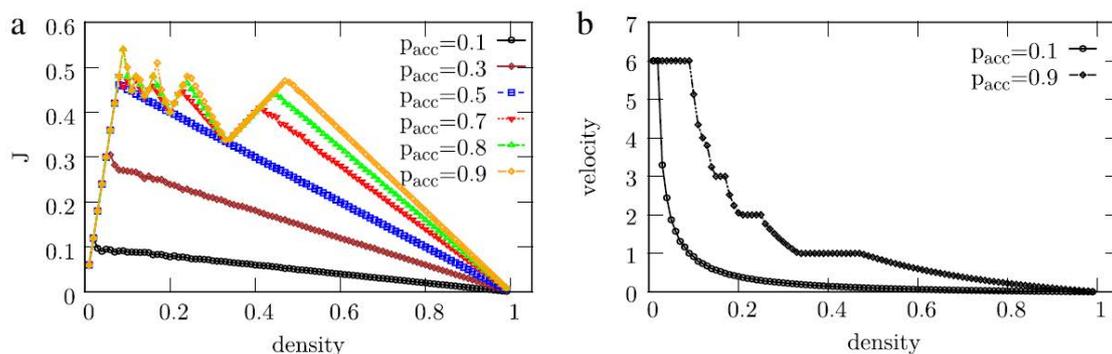


Fig. 3.4: グラフ a は mNaSch モデルの周期境界条件下における異なる加速確率に対する基本図を表し， グラフ b は周期境界条件下の異なる加速確率に対する平均速度を表す． グラフ a は横軸が密度で縦軸が交通流率を表し， グラフ b は横軸が密度で縦軸が平均速度を表す． グラフ a と b は参考文献<sup>40)</sup>より抜粋．

ピークが存在する密度領域について、各密度に対する車両速度の分配（占有率）の視点から考えてみよう。Fig. 3.5は各色の線が対応する速度を持つ車両の割合を示す。このグラフは横軸が密度で縦軸が占有率を表す。このグラフは加速確率が  $p_{acc} = 0.9$  の場合であることを注意しよう。各加速確率に対する占有率の詳細は巻末の付録に譲ろう。加速確率が  $p_{acc} > 0.5$  である占有率のグラフを見ると、特に mNaSch モデルと NaSch モデルの大きな違いは、mNaSch モデルでは高密度領域において1車線道路上の車両が同じ速度  $v$ （あるいは1車線道路上に複数の車両集団が存在し、ほとんどの車両集団の速度が2つの異なる速度  $v$  か  $v-1$  のどちらかである状態）で移動するという安定状態に収束することだ。ここで、交通流に含まれる車両集団の車両の速度が揃い、また各車両は停止していない（速度が0でない）ので、交通流はシンクロ流と見なせることに注意しよう。また、加速確率が  $p_{acc} \leq 0.5$  である占有率のグラフ（付録参照のこと）を見ると、ほとんどのグラフにおいて交通流には停止している車両と、最大速度  $v_{max}$  で走る車両の2種類が目立つ。

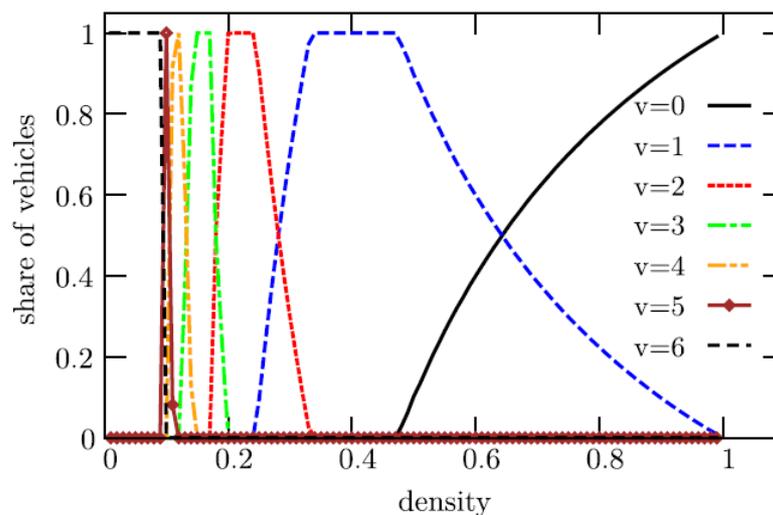


Fig. 3.5: mNaSch モデルの周期境界条件下における各密度に対する各速度の占有率 ( $p_{acc} = 0.9$ )。横軸は密度で縦軸は占有率を表す。各色の線が対応する速度を持つ車両の割合を示す。参考文献<sup>40)</sup>より抜粋。

更に高密度の時を考えよう。基本図のグラフ a を見ると、密度の増加とともに交通流率が減少している。つまり、交通流に含まれる車両集団の中で、停止している車両が存在するのだ。ここで、停止する車両が存在しているので、交通流は渋滞流と見なせることに注意しよう。従って、加速確率が  $p_{acc} > 0.5$  の時、mNaSch モデルは密度に応じて自由流・シンクロ流・渋滞流の異なる3相に関する相転移を再現するのだ。

## 第4章 緩やかな安全速度を持つ交通流の解析 (gradual-NaSch モデル)

mNaSch モデルは Table 3.1 を満たす安全速度  $\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  を用いて、各車両が衝突しないことを保障し、シンクロ流を再現するモデルである。定理1において衝突がないことを示すために用いられた関係式 (3.4) は最大速度が  $v_{\max} = 6$  に対して数値表を用いて示されており\*、任意の最大速度に対して関係式 (3.4) は解析的に示されたわけではない。そこで、Table 3.1 を用いずに、任意の最大速度に対して関係式 (3.4) が導かれることを示す。この関係式から各車両が衝突しないことが確認できる。

mNaSch モデルでは、ある1つの関数形で与えられる安全速度が取り扱われている。さて、安全速度の選択は一意ではなく、シンクロ流を再現する安全速度のユニバーサルな特徴は明らかにされていない。そこで、本研究では「車間距離に対して運転手に許容される速度の上限値」が「mNaSch モデルの速度の上限値」よりも小さい2種類の関数形の安全速度を提示し、それを取り込んだモデルに対して数値解析を行った。ここで、mNaSch モデルの安全速度  $\mu$  とは異なる2つの安全速度は、車間距離  $\delta_t^i$  に対する安全速度の関数形が安全速度  $\mu(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  よりも緩やかな関数で与えられることに注意しよう。本論文では、これらの変形されたモデルを gradual-NaSch モデルと呼ぶことにする。まず、この変形の下で各車両が衝突する可能性があるため、任意の最大速度に対して各車両が衝突しないことを確認する。そして、新たに導入した gradual-NaSch モデルは mNaSch モデルと同様に自由流・シンクロ流・渋滞流の間の相転移現象を再現することを示す。ここで、gradual-NaSch モデルの境界条件は周期境界条件（閉じた系）であることに注意しよう。

新しく提示する2つの安全速度をそれぞれ  $\mu_1(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  と  $\mu_2(v_t^{i+1}, \delta_t^i)$  と置こう。安全速度  $\mu_1$  を以下のように定義しよう。

$$\mu_1(v_t^{i+1}, \delta_t^i) = \min \left\{ \left\lfloor \sqrt{\delta_t^i - 1 + \frac{1}{2}v_t^{i+1}(v_t^{i+1} - 1)} \right\rfloor; v_{\max} \right\} \quad (4.1)$$

---

\*第3章の5節を参照のこと

次に、安全速度  $\mu_2$  を以下のように定義しよう.

$$\mu_2(v_t^{i+1}, \delta_t^i) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{1}{2} \sqrt{4\delta_t^i - 3 + 3v_t^{i+1}(v_t^{i+1} - 1)} - \frac{1}{2} \right\rfloor; v_{\max} \right\} \quad (4.2)$$

gradual-NaSch モデルと mNaSch モデルは、両方とも 1 車線道路上の交通流の特徴を再現するセルオートマトンモデルであり、両者の違いは安全速度の与え方が異なる点であることに注意しよう. 次節では各安全速度に対して、衝突がないことを保障することを示すために用いられる関係式を解析的に示す.

#### 4.1 無衝突を示すために用いられる関係式の数学的証明

安全速度の変形の下で、各車両が衝突をする可能性があるため、本節では mNaSch モデルの安全速度  $\mu$  と gradual-NaSch モデルの安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いる時、各車両が衝突しないことを確認するために、無衝突を保障することを示すのに用いられる関係式を解析的に示す. 早くシミュレーションの結果を知りたい方は、各車両が衝突しないことを認めた上で次節へ読み飛ばしてもよい.

**証明** mNaSch モデルの各車両の最大速度は  $v_{\max} = 6$  であり、安全速度  $\mu$  おいて、衝突しないことを保障することを示すために用いられる関係式 (3.4) は

$$\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (4.3)$$

と書き表される. 任意の最大速度に対して不等式 (4.3) が成り立つことを解析的に示そう. 簡単化のために、前方車両の速度を  $v = v_{t-1}^{i+1}$  とし、車間距離を  $\delta = \delta_{t-1}^i$  としよう.

(i)  $v = 0, 1$  の時を考えよう. 2 次関数  $f(\delta)$  は

$$f(\delta) = \delta^2 - \delta + 2 = \delta(\delta - 1) + 2 > 0 \quad (4.4)$$

と書き表すとすると、 $f(\delta)$  は常に正である. 但し、車間距離が  $\delta \geq 1$  であることに注意しよう. 式 (4.4) の両辺を 4 倍すると、

$$4\delta^2 - 4\delta + 8 > 0 \quad (4.5)$$

を得る. 更に両辺に  $8\delta > 0$  を加えると式 (4.5) は

$$\begin{aligned} 4\delta^2 + 4\delta + 8 &= 4\delta^2 + 4\delta + (7 + 1) > 8\delta \\ 4\delta^2 + 4\delta + 1 &> 8\delta - 7 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$8\delta - 7 < 4\delta^2 + 4\delta + 1 = (2\delta + 1)^2$$

と書き表される.  $8\delta - 7 > 0$  なので, 式 (4.6) の両辺の平方根を取ると, 式 (4.6) は

$$\sqrt{8\delta - 7} < \sqrt{(2\delta + 1)^2} = |2\delta + 1| = 2\delta + 1 \quad (4.7)$$

と表される. ここで,  $2\delta + 1 > 0$  であることに注意しよう. 式 (4.7) の両辺を  $1/2$  倍すると, 式 (4.7) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{8\delta - 7} &< \frac{1}{2}(2\delta + 1) = \delta + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{8\delta - 7} - \frac{1}{2} &< \delta \end{aligned} \quad (4.8)$$

と書き表される. 前方車両の速度と車間距離をそれぞれ  $v = v_{t-1}^{i+1}$  と  $\delta = \delta_{t-1}^i$  に戻し, 左辺を安全速度  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  と見なすと, 式 (4.8) は

$$\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i \quad (4.9)$$

と書き換えられる.

(ii)  $v \geq 2$  の時を考えよう. 2次関数  $g(v, \delta)$  は

$$g(v, \delta) = \delta^2 + 2v\delta - 3\delta + 2 = \delta(\delta + 2v - 3) + 2 > 0 \quad (4.10)$$

と書き表されるとすると,  $g(v, \delta)$  は常に正である. 但し, 車間距離が  $\delta \geq 1$  であり, 前方車両の速度が  $v \geq 2$  であることに注意しよう. 式 (4.10) の両辺を4倍すると, 式 (4.10) は

$$\begin{aligned} 4\delta^2 + 8v\delta - 12\delta + 8 &= 4\delta^2 + 8v\delta - (8 + 4)\delta + (7 + 1) > 0 \\ 4\delta^2 + 8v\delta - 4\delta + 1 &> 8\delta - 7 \end{aligned} \quad (4.11)$$

と書き表される. 式 (4.11) の両辺に  $4v^2 - 4v$  を加えると, 式 (4.11) は

$$\begin{aligned} 8\delta - 7 + 4v^2 - 4v &< 4\delta^2 + 8v\delta - 4\delta + 1 + 4v^2 - 4v \\ 8\delta - 7 + 4v(v - 1) &< (2\delta)^2 + (2v)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 2\delta \cdot 2v + 2 \cdot 2v \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 2\delta \\ 8\delta - 7 + 4v(v - 1) &< (2\delta + 2v - 1)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

と表される. ここで, 3項和の公式である

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \quad (4.13)$$

を用いたことに注意しよう. また,  $v \geq 2$  と  $\delta \geq 1$  であり, 式 (4.12) の左辺が正であるので, 式 (4.12) の両辺の平方根を取ると,

$$\sqrt{8\delta - 7 + 4v(v - 1)} < \sqrt{(2\delta + 2v - 1)^2} = |2\delta + 2v - 1| = 2\delta + 2v - 1 \quad (4.14)$$

を得る. 但し,  $v \geq 2$  と  $\delta \geq 1$  なので,  $2\delta + 2v - 1 > 0$  であることに注意しよう. 式 (4.14) の両辺を  $1/2$  倍すると, 式 (4.14) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{8\delta - 7 + 4v(v-1)} &< \frac{1}{2}(2\delta + 2v - 1) = \delta + v - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{8\delta - 7 + 4v(v-1)} - \frac{1}{2} &< \delta + v - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \delta + v - 1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

と書き表される. 式 (4.15) の左辺を安全速度  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  と見なすと, 式 (4.15) は

$$\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + v_{t-1}^{i+1} - 1 \quad (4.16)$$

と表される.

(i) と (ii) から, 安全速度の関係式は

$$\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (4.17)$$

と書き表される. 式 (4.17) は任意の最大速度に対して数値表を用いずに解析的に証明された. 関係式 (4.17) から各車両が衝突しないことが確認できた.

今までは mNaSch モデルにおいて衝突がないことを確認した. これからは, gradual-NaSch モデルにおいて衝突がないかを考える. 安全速度  $\mu_1$  もまた, 安全速度  $\mu$  に関する無衝突の関係式と同じように

$$\mu_1(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (4.18)$$

を満たすことを示そう. 簡単化のため,  $v = v_{t-1}^{i+1}$  と  $\delta = \delta_{t-1}^i$  と置く.

(iii)  $v = 0, 1$  の時を考えよう. 関数  $h_1(\delta)$  は

$$h_1(\delta) = \sqrt{\delta - 1} < \delta \quad (4.19)$$

と書き表されるとすると,  $h_1(\delta)$  は常に  $h_1(\delta) \geq 0$  である. ここで, 車間距離が  $\delta \geq 1$  であることに注意しよう. 安全速度は  $\mu_1(v, \delta) = \sqrt{\delta - 1}$  なので, 式 (4.19) は衝突がないことを保障することを示すために用いられる関係式となる.

(iv)  $v \geq 2$  の時を考えよう. 2次関数  $h_2(v)$  は

$$\begin{aligned}
 h_2(v) &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{2}v + 2 \\
 &= \frac{1}{2}(v^2 - 3v + 4) \\
 &= \frac{1}{2}\left(v^2 - 3v + \frac{9}{4} + \frac{7}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left\{\left(v - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\} > 0
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

と表されるとすると,  $h_2(v)$  は常に正である. また,  $\delta$  に関する2次関数  $h_3(\delta)$  は

$$h_3(\delta) = \delta^2 + 2v\delta - 3\delta = \delta(\delta + 2v - 3) > 0 \tag{4.21}$$

と置く. 式 (4.20) と式 (4.21) を足すと,

$$\begin{aligned}
 \delta^2 + 2v\delta - 3\delta + \frac{1}{2}v^2 - \frac{3}{2}v + 2 &> 0 \\
 \delta^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)v + 2 - 3\delta + 2v\delta &> 0 \\
 \delta^2 + v^2 + 1 + 2v\delta - 2v - 2\delta - \frac{1}{2}v(v-1) + 1 - \delta &> 0 \\
 \delta - 1 + \frac{1}{2}v(v-1) &< \delta^2 + v^2 + 1 + 2v\delta - 2v - 2\delta \\
 \delta - 1 + \frac{1}{2}v(v-1) &< (\delta + v - 1)^2
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

という不等式が得られる. ここで, 3項和の公式 (4.13) を用いたことに注意しよう. また, 前方車両の速度と車間距離はそれぞれ  $v \geq 2$ ,  $\delta \geq 1$  であり, 式 (4.22) の左辺が正なので, 両辺の平方根を取ると,

$$\sqrt{\delta - 1 + \frac{1}{2}v(v-1)} < \sqrt{(\delta + v - 1)^2} = |\delta + v - 1| = \delta + v - 1 \tag{4.23}$$

を得る. ここで,  $v \geq 2$  であり,  $\delta \geq 1$  なので,  $\delta + v - 1 > 0$  であることに注意しよう. 式 (4.23) の左辺を安全速度  $\mu_1$  と見なすと,

$$\mu_1(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + v_{t-1}^{i+1} - 1 \tag{4.24}$$

を得る.

(iii) と (iv) から, 安全速度の関係式は

$$\mu_1(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \tag{4.25}$$

と書き表される．式 (4.25) は解析的に証明された．関係式 (4.25) から各車両が衝突しないことが確認できた．

安全速度  $\mu_2$  もまた，安全速度  $\mu$  に関する無衝突の関係式と同じように

$$\mu_2(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (4.26)$$

を満たすことを示そう．簡単化のため， $v = v_{t-1}^{i+1}$  と  $\delta = \delta_{t-1}^i$  と置く．

(v)  $v = 0, 1$  の時を考えよう．2次関数  $k_1(\delta)$  は

$$k_1(\delta) = 4\delta^2 + 1 > 0 \quad (4.27)$$

と表されるとすると， $k_1(\delta)$  は常に正である．ここで，車間距離が  $\delta \geq 1$  であることに注意しよう．式 (4.27) は正であり， $-3$  より大きいので，

$$\begin{aligned} -3 &< 4\delta^2 + 1 \\ 4\delta - 3 &< 4\delta^2 + 4\delta + 1 = (2\delta + 1)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

という不等式が得られる．但し， $4\delta > 0$  である． $4\delta - 3$  が正なので，式 (4.28) は

$$\begin{aligned} \sqrt{4\delta - 3} &< \sqrt{(2\delta + 1)^2} = |2\delta + 1| = 2\delta + 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3} &< \frac{1}{2}(2\delta + 1) = \delta + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3} - \frac{1}{2} &< \delta \end{aligned} \quad (4.29)$$

と書き換えられる．前方車両の速度が  $v = 0, 1$  に対する安全速度は

$$\mu_2(v, \delta) = \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3} - \frac{1}{2} \quad (4.30)$$

と表されるので，式 (4.29) は

$$\mu_2(v, \delta) < \delta \quad (4.31)$$

と書き表される．式 (4.31) は無衝突を保障することを示すために用いられる関係式となる．

(vi)  $v \geq 2$  の時を考えよう．2次関数  $k_2(v)$  は

$$\begin{aligned} k_2(v) &= v^2 - v + 4 \\ &= \left(v^2 - v + \frac{1}{4}\right) + \frac{15}{4} \\ &= \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

と表されるとすると,  $k_2(v)$  は常に正である. また,  $\delta$  に関する 2 次関数  $k_3(\delta)$  は

$$k_3(\delta) = 4\delta^2 + 8v\delta - 8\delta = 4\delta(\delta + 2v - 2) > 0 \quad (4.33)$$

と置く. 式 (4.32) と式 (4.33) を足すと,

$$\begin{aligned} k_2(v) + k_3(\delta) &> 0 \\ 4\delta(\delta + 2v - 2) + v^2 - v + 4 &> 0 \\ 4\delta^2 - 8\delta + 8v\delta + (4 - 3)v^2 + (3 - 4)v + 4 &> 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$4\delta^2 + 4v^2 + 1 + 8v\delta - 4v - 4\delta - 3v^2 + 3v + 3 - 4\delta > 0$$

$$4\delta - 3 + 3v(v - 1) < 4\delta^2 + 4v^2 + 1 + 8v\delta - 4v - 4\delta = (2\delta + 2v - 1)^2$$

という不等式が得られる.  $\delta \geq 1$  と  $v \geq 2$  の時, 常に

$$4\delta - 3 + 3v(v - 1) > 0 \quad (4.35)$$

という不等式が成り立つので, 式 (4.34) は

$$\begin{aligned} \sqrt{4\delta - 3 + 3v(v - 1)} &< \sqrt{(2\delta + 2v - 1)^2} = |2\delta + 2v - 1| = 2\delta + 2v - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3 + 3v(v - 1)} &< \frac{1}{2}(2\delta + 2v - 1) = \delta + v - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3 + 3v(v - 1)} - \frac{1}{2} &< \delta + v - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \delta + v - 1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

と書き換えられる. ここで, 車間距離が  $\delta \geq 1$  であり, 前方車両の速度が  $v \geq 2$  であることに注意しよう. 安全速度が

$$\mu_2(v, \delta) = \frac{1}{2}\sqrt{4\delta - 3 + 3v(v - 1)} - \frac{1}{2} \quad (4.37)$$

と書き表されるので, 式 (4.36) は

$$\mu_2(v, \delta) < \delta + v - 1 \quad (4.38)$$

と表される.

(v) と (vi) から, 安全速度の関係式は

$$\mu_2(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) < \delta_{t-1}^i + \max\{v_{t-1}^{i+1} - 1, 0\} \quad (4.39)$$

と書き表される. 式 (4.39) は解析的に証明された. 関係式 (4.39) から各車両が衝突しないことが確認できた. 以下では, 安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いた交通流モデル (gradual-NaSch モデル) の解析を行おう.

## 4.2 シミュレーション

mNaSch モデルの安全速度  $\mu$  と異なる 2 つの安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いた制限速度（最大速度）のある 1 車線道路の交通流を再現する gradual-NaSch モデルの解析を行おう．安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  は，再掲すると

$$\begin{aligned}\mu_1(v_t^{i+1}, \delta_t^i) &= \min \left\{ \left\lfloor \sqrt{\delta_t^i - 1 + \frac{1}{2}v_t^{i+1}(v_t^{i+1} - 1)} \right\rfloor; v_{\max} \right\} \\ \mu_2(v_t^{i+1}, \delta_t^i) &= \min \left\{ \left\lfloor \frac{1}{2}\sqrt{4\delta_t^i - 3 + 3v_t^{i+1}(v_t^{i+1} - 1)} - \frac{1}{2} \right\rfloor; v_{\max} \right\}\end{aligned}\quad (4.40)$$

と書き表される．ここで  $\lfloor \cdot \rfloor$  は床関数を表し，各車両の性能を表す最大速度は同一の  $v_{\max}$  とすることに注意しよう．簡単化のため， $\mu_1$  と  $\mu_2$  をまとめて  $\mu_i$  と書こう．ここで， $i = 1, 2$  となることに注意しよう．

gradual-NaSch モデルのシミュレーション方法を説明しよう．1 車線道路は 1 次元的に並べられたセルの配列としてモデル化される．まず，物理量を再び定義しておこう．時刻  $t$  における  $i$  番目の車両の位置と速度をそれぞれ  $x_t^i$  と  $v_t^i$  と置き，時刻  $t-1$  の車間距離を  $\delta_{t-1}^i = x_{t-1}^{i+1} - x_{t-1}^i$  と置く．各車両の速度  $v_t^i$  は  $\mu_i(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  によって制限されているとしよう． $\mu_i$  は速度  $v_t^i$  の上限値として働くので，mNaSch モデルと同様に  $\mu_i(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  は各車両が衝突しないための安全速度と見なせるのだ．ここで，安全速度  $\mu(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i)$  は時刻  $t-1$  の車間距離  $\delta_{t-1}^i$  と  $i$  番目の直前方車両である  $i+1$  番目の車両の速度  $v_{t-1}^{i+1}$  に依存していることに注意しよう．

安全速度  $\mu_i$  を用いた交通流の運動ルールを説明しよう．加速確率を  $p_{\text{acc}}$  とすると，各車両の速度の更新ルールは

$$v_t^i = \begin{cases} v_{t-1}^i + 1 & \text{if } v_{t-1}^i + 1 \leq \mu_i(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) \text{ and } \xi \leq p_{\text{acc}} \\ v_{t-1}^i & \text{if } v_{t-1}^i + 1 \leq \mu_i(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) \text{ and } \xi > p_{\text{acc}} \\ \mu_i(v_{t-1}^{i+1}, \delta_{t-1}^i) & \text{otherwise} \end{cases}\quad (4.41)$$

と表される．ここで，変数  $\xi$  は区間  $[0,1]$  の一様乱数を表し，更新される速度  $v_t^i$  は  $v_{t-1}^i - 1 \leq v_t^i \leq v_{t-1}^i + 1$  の範囲内に収まることに注意しよう．従って，各車両の加速と減速の能力には限界があり，1 時間ステップあたり速度はせいぜい  $\pm 1$  しか変化しない．速度の更新ルールはすべての車両に平行に適応され，時刻  $t$  の  $i$  番目の車両の位置は  $x_t^i = x_{t-1}^i + v_t^i$  となるのだ．

シミュレーションにおける物理量を説明しよう．1 車線道路を表すセルの数は  $L = 10^4$

とし、車両の総数を  $M$  とすると、交通流の密度は

$$\rho = \frac{M}{L} \quad (4.42)$$

と定義される。ここで、gradual-NaSch モデルの境界条件は周期境界条件であることに注意しよう。つまり、道路の一方の境界を通過した車両は反対側の境界に移るのだ。また、時刻  $t$  における平均速度  $\bar{v}_t$  は

$$\bar{v}_t = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_t^i \quad (4.43)$$

と書き表される。密度  $\rho$  と平均速度  $\bar{v}_t$  を用いて表される時刻  $t$  の交通流率  $J_t$  は

$$\begin{aligned} J_t &= \rho \bar{v}_t \\ &= \frac{M}{L} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_t^i \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M v_t^i \end{aligned} \quad (4.44)$$

と表されるのだ。また、時刻  $t$  において速度  $v = 0, 1, 2, 3, \dots, v_{\max}$  を持つ車両の占有率  $C_t^v$  (share of vehicles) は

$$C_t^v = \frac{\text{時刻 } t \text{ において速度 } v \text{ を持つ車両の総数}}{M} \quad (4.45)$$

と書き表される。

時刻  $t$  における各物理量を時間平均しよう。平均化するのに用いる時間間隔を  $\Delta T = L = 10^4$  とすると、時間平均化された平均速度  $\bar{v}$  は

$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{t=10L+1}^{10L+\Delta T} \bar{v}_t \quad (4.46)$$

と書き表される。また、時間平均された交通流率  $J$  は

$$J = \frac{1}{\Delta T} \sum_{t=10L+1}^{10L+\Delta T} J_t \quad (4.47)$$

と表される。時間平均された占有率  $C^v$  は

$$C^v = \frac{1}{\Delta T} \sum_{t=10L+1}^{10L+\Delta T} C_t^v \quad (4.48)$$

と書き表される。

解析条件を説明しよう．mNaSch モデルと同様に各車両の最大速度は  $v_{\max} = 6$  とする．密度は  $0.01 \leq \rho \leq 1$  の範囲にあり，密度の刻み幅は0.01 である．各密度に対して， $T = 10L$  時間ステップだけ計算を行った上で，更に  $\Delta T = L = 10^4$  時間ステップ分だけ計算を行い時間平均された平均速度・交通流率・占有率を求めるのだ．

Fig. 4.1 は安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いて得られる平均速度である．グラフ (a) は安全速度  $\mu_1$  を用いた場合であり，グラフ (b) は安全速度  $\mu_2$  を用いた場合の平均速度を表す．横軸は密度で縦軸は平均速度を表す．平均速度の詳細は付録に譲る．平均速度のグラフから，密度の増加とともに平均速度が減少していることが理解でき，mNaSch モデルより gradual-NaSch モデルの平均速度の方が低い傾向にあることが分かる．

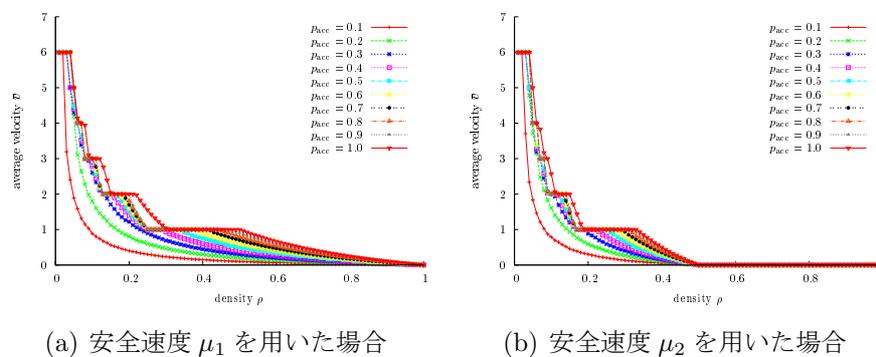


Fig. 4.1: 周期境界条件下での各密度に対する平均速度．横軸は密度で縦軸は平均速度を表す．グラフ (a) は安全速度  $\mu_1$  を用いた場合であり，グラフ (b) は安全速度  $\mu_2$  を用いた場合の平均速度を表す．

Fig. 4.2 は，各密度に対する基本図を表す．グラフ (a) は安全速度  $\mu_1$  を用いた場合の基本図であり，グラフ (b) は安全速度  $\mu_2$  を用いた場合の基本図である．横軸は密度で縦軸は交通流率を表す．基本図の詳細は付録に譲る．基本図を見ると，低密度の時，密度に比例して交通流率が増加する密度領域が存在し，この部分が自由流を表すことが理解できる．また，安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いた場合の交通流率が mNaSch モデルの交通流率に比べて低くなっていることが分かる．安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  に対する加速確率が  $p_{\text{acc}} = 0.9$  の時の自由流の交通流率の最大値は0.25程度であり，加速確率が  $p_{\text{acc}} = 0.9$  の mNaSch モデルの自由流の交通流率の最大値 (0.55程度) より低くなったのは，車間距離に対する安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  の関数形が安全速度  $\mu$  より緩やかであるためであることが示唆された．つまり，gradual-NaSch モデルは mNaSch モデルに比べて緩やかな安全速度を持ち，平均速度が低くなる傾向にあるために，gradual-NaSch モデルの交通流率は mNaSch モデルよりも下がる傾向にあることが分かるのだ．

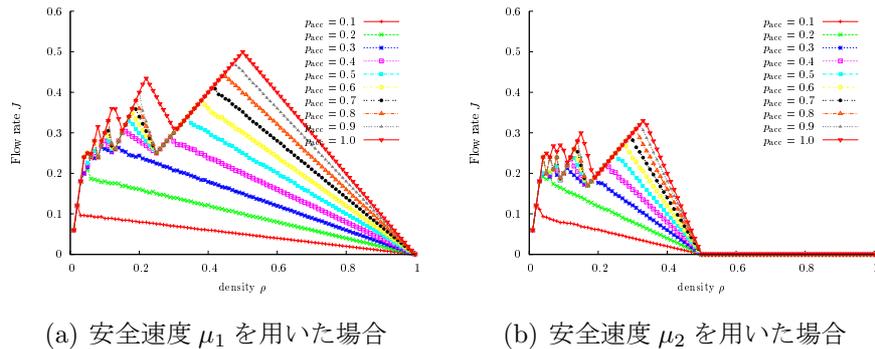


Fig. 4.2: 周期境界条件下での各密度に対する基本図. 横軸は密度で縦軸は交通流率を表す. グラフ (a) は安全速度  $\mu_1$  を用いた場合の基本図であり, グラフ (b) は安全速度  $\mu_2$  を用いた場合の基本図である.

基本図を見てピークの存在する密度領域について考えよう. 安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  に対する占有率のグラフ (付録を参照) を見ると, 加速確率が  $p_{\text{acc}} > 0.3$  の時, 1種類, あるいは2種類の速度についてのシンクロ流が生じている密度領域が存在する. つまり, この領域内では交通流の全車両が同じ速度で走行しているか, あるいは交通流に含まれる車両集団内の各車両は, 所属する車両集団毎にそれぞれ同じ速度で走行しているのだ. このように, シンクロ流が生じている時の車両速度の種類は, 占有率のグラフから1種類, あるいは2種類と分かり, その速度は  $v$  (あるいは  $v$  と  $v-1$ ) と分かるのだ.

シンクロ流が生じる理由を考えよう. gradual-NaSch モデルにおいて更新される速度  $v_t^i$  は  $v_{t-1}^i - 1 \leq v_t^i \leq v_{t-1}^i + 1$  の範囲内に収まり, 減速能力に制限が存在する. つまり, 渋滞-非渋滞相転移現象を再現する NaSch モデルの減速能力の制限より gradual-NaSch モデルの減速能力の制限の方が強いために, 加速確率が高い時は NaSch モデルと比べて gradual-NaSch モデルの方が車両が停止するという渋滞現象が生じにくいことが示唆された. もし仮に gradual-NaSch モデルが渋滞発生しやすいモデルであるならば, gradual-NaSch モデルの各車両は停止しやすいために各車両の移動を伴うシンクロ流が生じにくくなるだろう. 加速確率が高い時は NaSch モデルと比べて gradual-NaSch モデルでは車両が停止するという渋滞現象が発生しにくく, 車両集団に含まれる車両は移動し続けることになり, このような状況が1種類, あるいは2種類の速度についてのシンクロ流を生じる理由の1つであることが示唆される.

次に, ピークの存在する密度よりも高密度な領域を考える. 密度の増加とともに交通流率が減少している密度領域が存在する. この密度領域において, 交通流に含まれる車両集団の中で, 停止している車両が存在しており渋滞が発生していることが分かる. つまり,

停止している車両集団が存在するので、交通流は渋滞流と見なせるのだ。また、安全速度  $\mu_2$  の関数形は緩やかであり、前方車両が停止していて車間距離が 2 の時に 0 となるので、基本図を見ると密度が 0.5 以上の時は交通流率と平均速度が 0 となることが示唆された。つまり、安全速度  $\mu_2$  を用いた時、密度が 0.5 以上の領域ではほとんどの車両が停止していることが示された。gradual-NaSch モデルにおいて、各密度に応じて自由流・シンクロ流・渋滞流が生じていることが理解できる。つまり、gradual-NaSch モデルは自由流・シンクロ流・渋滞流という異なる 3 つの相に関する相転移現象を再現する数理モデルであることが分かる。

## 第5章 結果と考察

交通流は多数の人間が自分の意思に従い思考しながら運転する車両集団の振る舞いから引き起こされる相転移現象である．本研究では，三相交通理論を用いた相転移現象の観点から安全速度を持つ交通流モデルとして，各車両が衝突しないことを保障する安全速度を持つ gradual-NaSch モデルを提案し，それを数値解析することでシンクロ流が生じる機構を解析した．gradual-NaSch モデルにおいて，各密度に応じて自由流・シンクロ流・渋滞流が生じていることが判明した．従って，gradual-NaSch モデルは自由流・シンクロ流・渋滞流という異なる3つの相に関する相転移現象を再現する数理モデルであることが示された．また，mNaSch モデルの安全速度  $\mu$  と gradual-NaSch モデルの安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  に対して，任意の最大速度において各車両が衝突しないことを保障することを示すために用いられる関係式は解析的に示された．そして，この関係式から各車両が衝突しないことが確認できた．数値計算の結果について要約すると，gradual-NaSch モデルには元の mNaSch モデルと比較して以下のような特徴がある．

- 車両速度が小さくなる傾向．
- 平均速度に比例する交通流率が小さくなるという傾向．
- 安全速度  $\mu_2$  を用いた場合，密度が 0.5 以上である領域ではほとんどの車両が停止している傾向．

車間距離に対して，gradual-NaSch モデルにおける速度の上限値は mNaSch モデルに比べて小さいからである．

交通流においてシンクロ流が生じるかは非自明であるが，gradual-NaSch モデルの数値計算から得られる安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  に対する占有率のグラフを見ると，加速確率が  $p_{acc} > 0.3$  の時，1種類，あるいは2種類の速度についてのシンクロ流が生じている密度領域が存在する．1種類，あるいは2種類の速度についてのシンクロ流が生じる理由の1つは，gradual-NaSch モデルの減速能力に制限があり，加速確率が高い時は車両が停止するという渋滞現

象が発生しにくいためであることが示唆された。

本研究で扱った gradual-NaSch モデルの境界条件は周期境界条件（閉じた系）であることに注意しよう。今後は，gradual-NaSch モデルを開いた系に対しても適応したり，安全速度の関数形が mNaSch モデルよりも急な傾きの関数で与えられる場合についてもシンクロ流が生じるか等を調べる必要があるであろう。

## 参考文献

- (1) Y. Sugiyama, *et al.*: New. J. Phys. **10**, no. 3 (2008) 033001
- (2) K. Nagel and M. Schreckenberg: J. Phys. I Fr. **2**, no. 12 (1992) 2221-2229.
- (3) M. J. Lighthill and G. B. Whitham: Proc. R. Soc. Lond. A **229**, no. 1178 (1955) 281–316.
- (4) M. J. Lighthill, *et al.*: Proc. R. Soc. Lond. A **229**, no. 1178 (1955) 317–345.
- (5) B. S. Kerner: *The Physics of Traffic* (Springer, 2004).
- (6) B. S. Kerner: *Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control: The Long Road to Three-Phase Traffic Theory* (Springer, 2009).
- (7) 湯川諭 : 物性研究 **65**, no. 1 (1995) 117–170.
- (8) H. Greenberg: Oper. Res. **7**, no. 1 (1959) 79–85.
- (9) L. C. Edie: Oper. Res. **9**, no. 1 (1961) 66–76.
- (10) A. Ceder: Transport. Res. Rec., no. 567 (1976).
- (11) B. S. Kerner and P. Konhäuser: Phys. Rev. E **48**, no. 4 (1993) R2335–R2338.
- (12) A. Reuschel: Öst. Ing. Arch. **4** (1950) 193–215.
- (13) L. A. Pipes: J. Appl. **24**, no. 3 (1953) 274–281.
- (14) D. C. Gazis, *et al.*: Oper. Res. **9**, no. 4 (1961) 545–567.
- (15) T. Chow: Oper. Res. **6**, no. 6 (1958) 827–834.
- (16) D. C. Gazis, *et al.*: Oper. Res. **7**, no. 4 (1959) 499–505.

- (17) R. Herman, *et al.*: Oper. Res. **7**, no. 1 (1959) 86–106.
- (18) E. Kometani and T. Sasaki: Oper. Res. **7**, no. 6 (1959) 704–720.
- (19) G. F. Newell: Oper. Res. **9**, no. 2 (1961) 209–229.
- (20) G. F. Newell: *Theories of instability in dense highway traffic* (Online version, 1962)
- (21) S. Bexelius: Transport. Res. **2**, no. 1 (1968) 13–21.
- (22) 杉山雄規 : *ながれ* **22** (2003) 95–108.
- (23) M. Bando, *et al.*: Phys. Rev. E **51**, no. 2 (1995) 1035–1042.
- (24) M. Bando, *et al.*: Jpn. J. Ind. Appl. Math. **11**, no. 2 (1994) 203–223.
- (25) M. Bando, *et al.*: J. Phys. I Fr. **5**, no. 11 (1995) 1389–1399.
- (26) Y. Sugiyama: *DYNAMICAL MODEL FOR CONGESTION OF FREEWAY TRAFFIC AND ITS STRUCTURAL STABILITY*. (TRB, 1996).
- (27) S. Wolfram: Rev. Mod. Phys. **55**, no. 3 (1983) 601–644.
- (28) S. Wolfram: *Theory and applications of cellular automata* (World scientific, 1986).
- (29) D. E. Wolf: Physica A **263**, no. 1 (1999) 438–451.
- (30) J. Treiterer and J. Myers: Transportation and traffic theory **6** (1974) 13–38.
- (31) M. J. Park: Three phase traffic theory (2012).
- (32) B. S. Kerner, *et al.*: Physica A **392**, no. 1 (2013) 221–251.
- (33) K. Nagel and H. J. Herrmann: Physica A **199**, no. 2 (1993) 254–269.
- (34) K. Nagel and S. Rasmussen: Traffic at the edge of chaos in *Artificial Life IV* (MIT press, 1994) 222–230.
- (35) M. Schreckenberg, *et al.*: Phys. Rev. E **51**, no. 4 (1995) 2939–2949.
- (36) D. Chowdhury, *et al.*: Phys. Rep. **329**, no. 4 (2000) 199–329.

- (37) B. S. Kerner, *et al.*: J. Phys. A **35**, no. 47 (2002) 9971.
- (38) H. K. Lee, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **92**, no. 23 (2004) 238702.
- (39) B. S. Kerner, *et al.*: Phys. Rev. E **84**, no. 4 (2011) 046110.
- (40) T. Chmura, *et al.*: Physica A **405** (2014) 332–337.
- (41) M. Koshi, *et al.*: Some findings and an overview on vehicular flow characteristics in *Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Flow Theory* (University of Toronto press, 1983) 403–426.
- (42) F. L. Hall, *et al.*: Transport. Res. A **20**, no. 3 (1986) 197–210.
- (43) F. L. Hall: Traffic stream characteristics in *Traffic Flow Theory* (1996).
- (44) W. Knospe, *et al.*: Phys. Rev. E **70**, no. 1 (2004) 016115.
- (45) A. Schadschneider, *et al.*: *Stochastic transport in complex systems: From molecules to vehicles* (Elsevier, 2010).
- (46) B. S. Kerner and H. Rehborn: Phys. Rev. E **53**, no. 2 (1996) R1297–R1300.
- (47) B.S. Kerner: Physica A **333** (2004) 379–440.
- (48) F. Knorr and M. Schreckenberg: J. Stat. Mech. **2012**, no. 10 (2012) P10018.

## 謝辞

修士論文を進めるにあたり、原稿などご指導ご鞭撻を賜りました神戸大学大学院理学研究科西野友年准教授に深謝いたします。物理学の質問や日々の相談に対して、丁寧なご指導をいただきました神戸大学大学院理学研究科久保木一浩准教授に深謝いたします。研究ならびに日々の相談に対して、非常に丁寧なご指導をいただきました学振研究員 Roman Krcmar 博士に深謝いたします。講義での質問などを通じてご指導いただきました神戸大学大学院理学研究科の先生方に深謝いたします。また、物理学への道を開いてくださった大阪大学大学院理学研究科湯川諭准教授に深謝いたします。度重なる質問や議論を通して、有益なご指導や示唆に富んだアドバイスを数多くいただき、また労を厭わず貴重な資料等を送ってくださった Universität Duisburg-Essen (Germany) の Florian Knorr 博士に深謝いたします。言語学などの質問をはじめ、ドイツ語で書かれた物理学に関する論文を読む際に様々なアドバイスをいただきました大阪大学大学院言語文化研究科越智正男准教授に深謝いたします。日々の研究生生活や研究姿勢などに対する数多くのアドバイスをいただきました大阪大学大学院基礎工学研究科熊谷悦生准教授に深謝いたします。交通物理をはじめ、様々な分野について議論していただきましたトヨタ自動車株式会社岩井秀成氏に感謝いたします。数学及びプログラミングに関して労を惜しまず多種多様な議論やアドバイスなど数多く手助けしていただいた株式会社日立産業制御ソリューションズ青木優介氏に感謝いたします。数学及びプログラミングのみならず、ドイツ語の論文を読むために様々な助力をいただいた大阪大学大学院人間科学研究科赤松祐太郎氏に感謝いたします。数学をはじめ、多面的に助言をいただきました近畿大学附属高等学校中学校数学教諭細田茂一先生に深謝いたします。

日々の研究生生活を共にし、研究に対して有益な助言をいただきました物性理論研究室並びに量子物性論研究室の皆様にご礼申し上げます。最後に、これまで温かく見守り支えてくださった両親並びに両祖母に深く感謝いたします。

## 付録A mNaSchモデルの占有率

各加速確率に対して、mNaSchモデルを用いて得られる占有率を以下に列挙する。

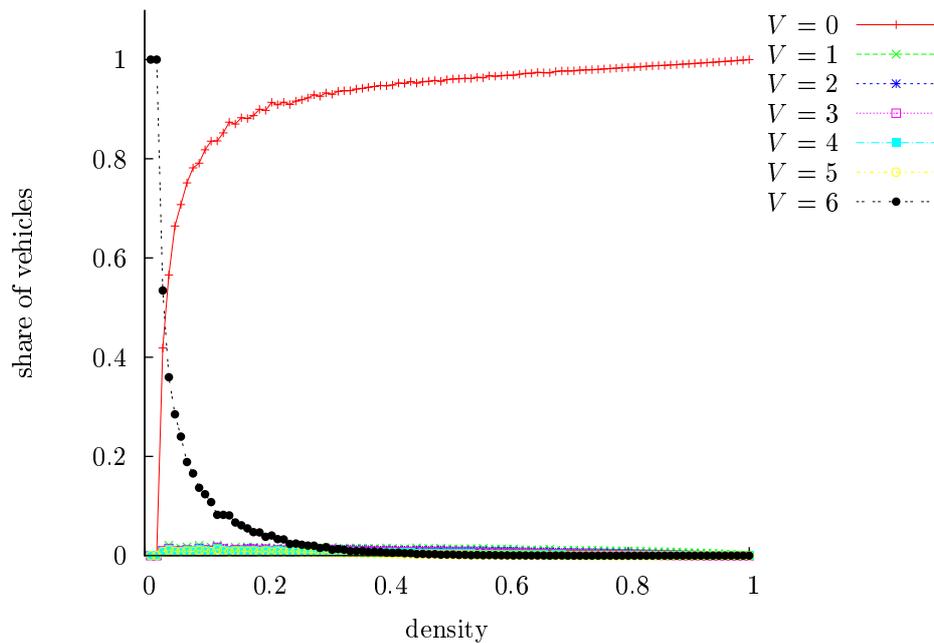


Fig. A.1: mNaSchモデルの周期境界条件下における各密度に対する占有率 ( $p_{\text{acc}=0.1}$ )。各色の線が対応する速度を持つ車両の割合を示す。

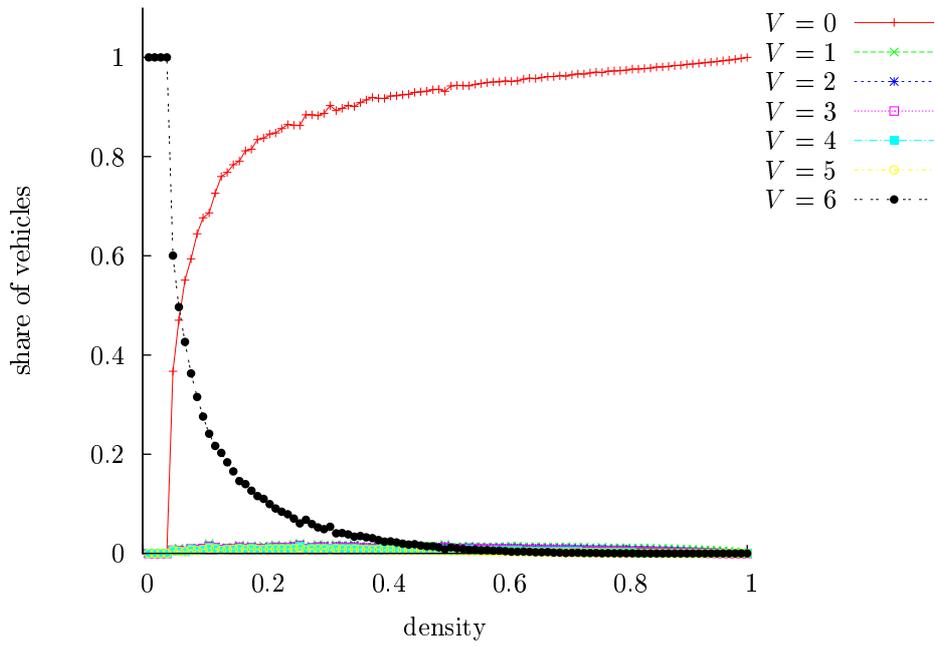


Fig. A.2: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc}=0.2$ ) .

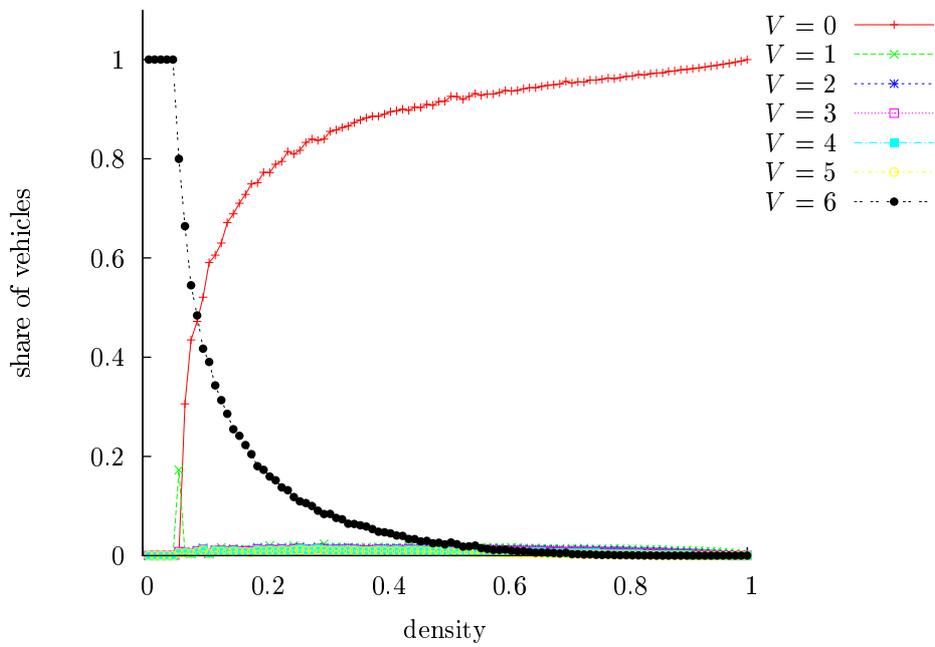


Fig. A.3: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc}=0.3$ ) .

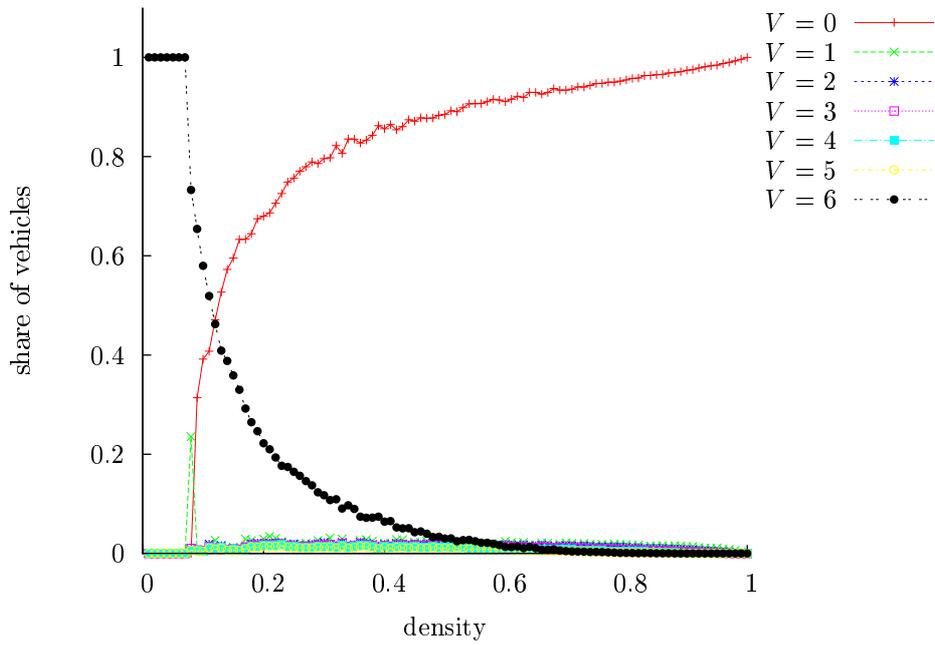


Fig. A.4: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc=0.4}$ ) .

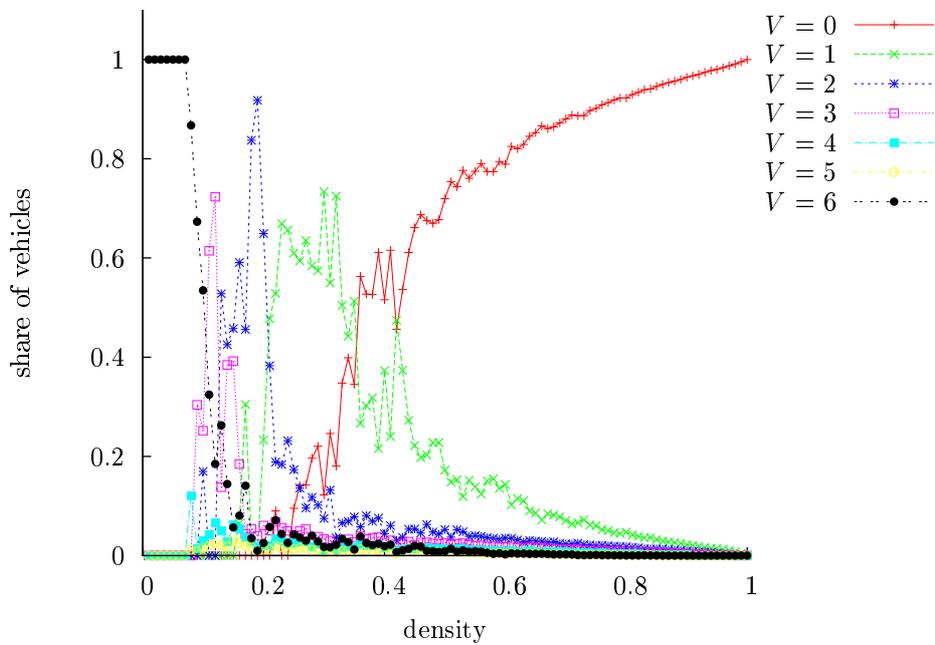


Fig. A.5: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc=0.5}$ ) .

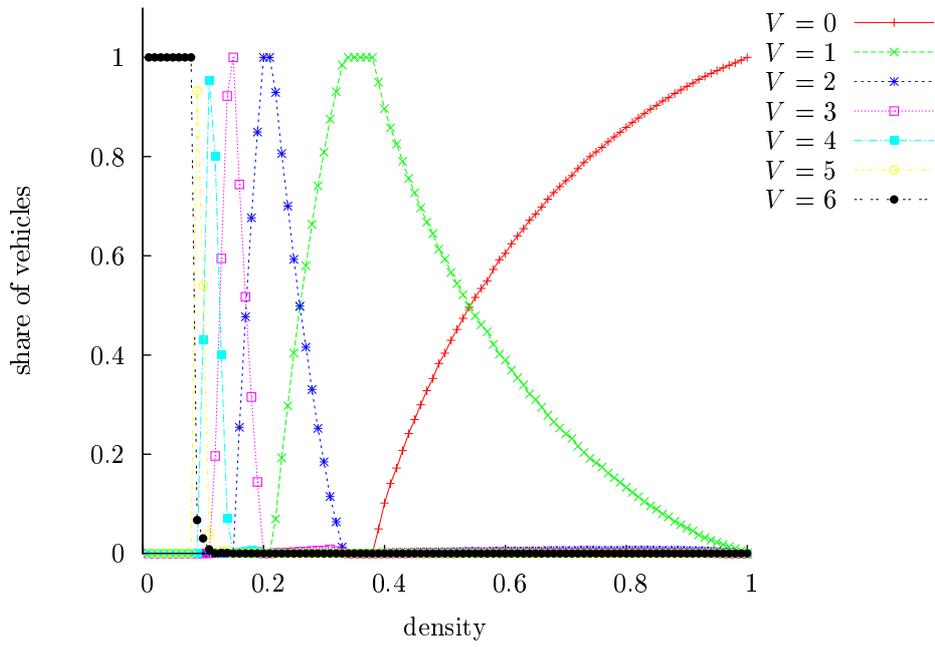


Fig. A.6: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc=0.6}$ ) .

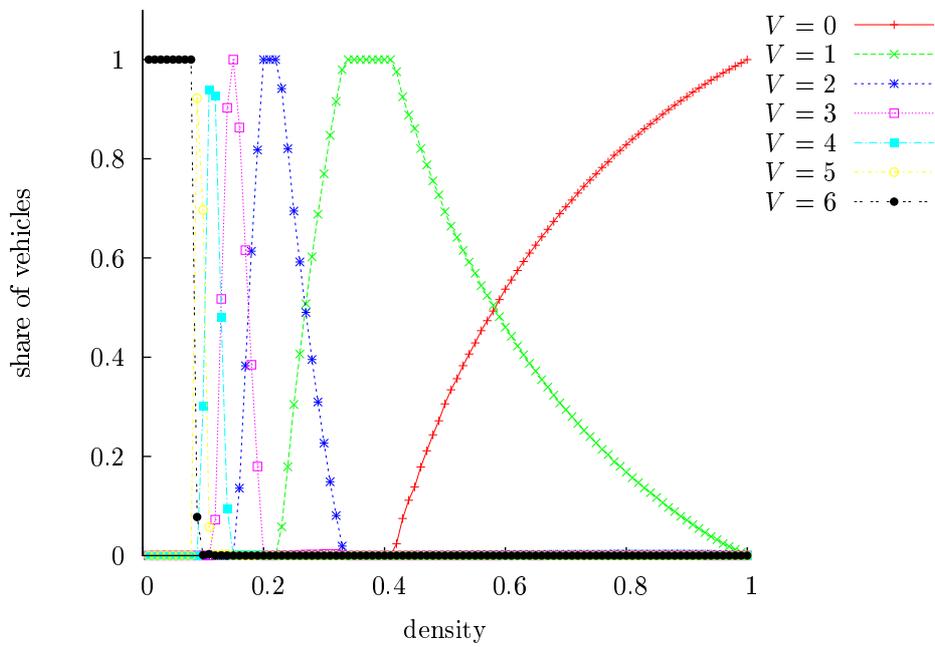


Fig. A.7: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc=0.7}$ ) .

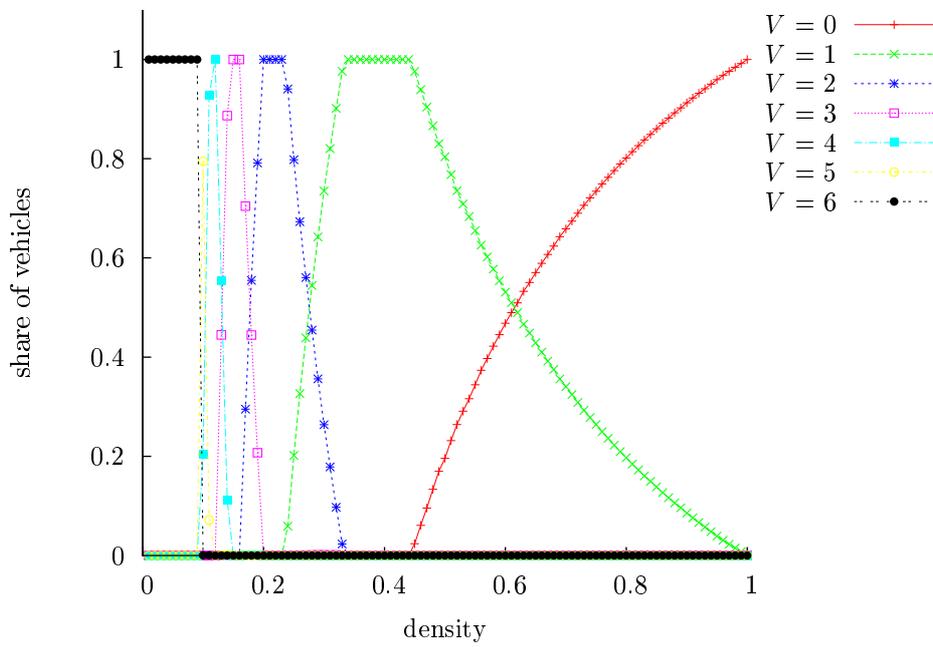


Fig. A.8: mNaSch モデルの占有率 ( $p_{acc=0.8}$ ) .

## 付録B gradual-NaSchモデルの基本図と平均速度と占有率

gradual-NaSch モデルを用いた場合の占有率と基本図を以下に列挙する. 安全速度  $\mu_1$  と  $\mu_2$  を用いて得られる基本図はそれぞれ Fig. B.1 と Fig. B.13 である. また, 平均速度についてのグラフはそれぞれ Fig. B.2 と Fig. B.14 である. そして, Fig. B.3 から Fig. B.12 までのグラフは, 安全速度が  $\mu_1$  の場合の占有率を表し, Fig. B.15 から Fig. B.24 までのグラフは, 安全速度が  $\mu_2$  の場合の占有率を表す.

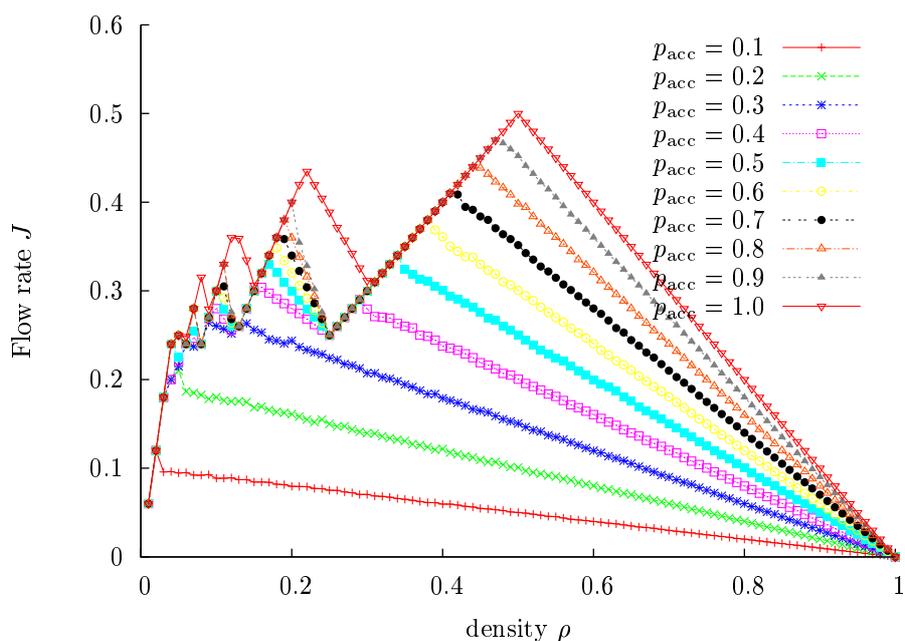


Fig. B.1: 周期境界条件下での各密度に対する基本図. (安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

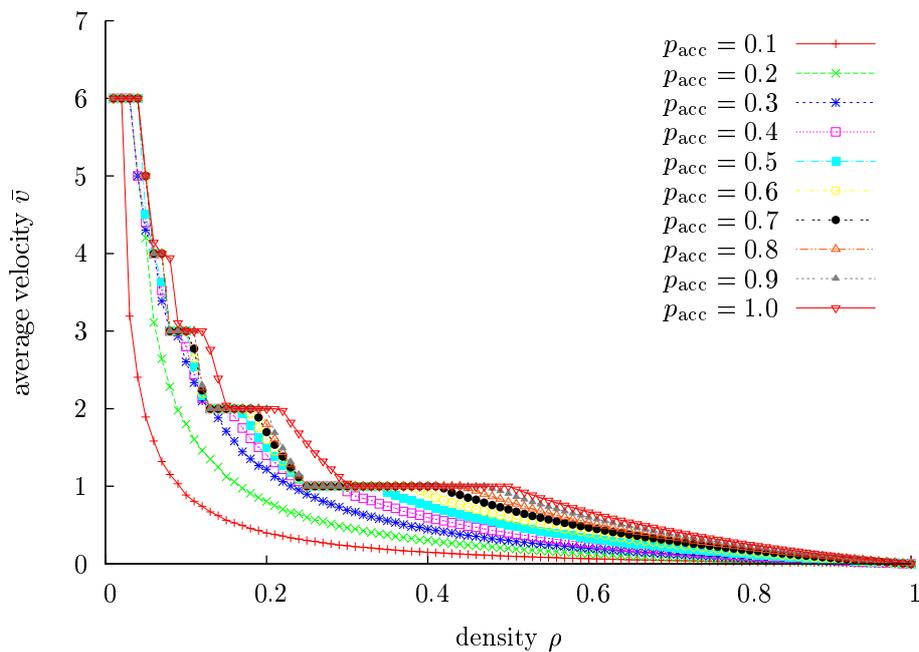


Fig. B.2: 周期境界条件下での各密度に対する平均速度. (安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

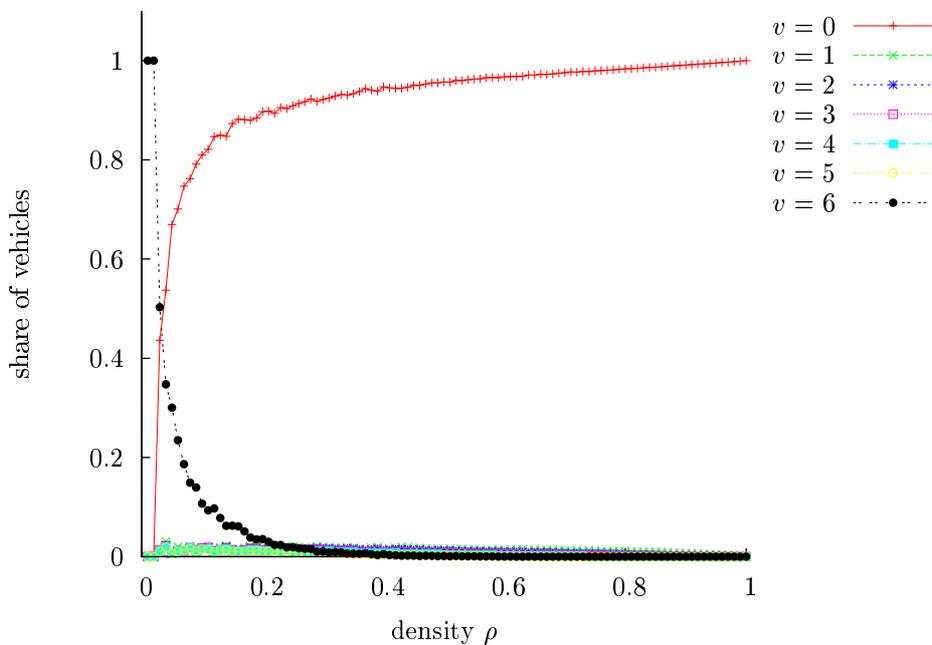


Fig. B.3: 周期境界条件下での各密度に対する占有率. ( $p_{acc}=0.1$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.) 各色の線が対応する速度を持つ車両の割合を示す.

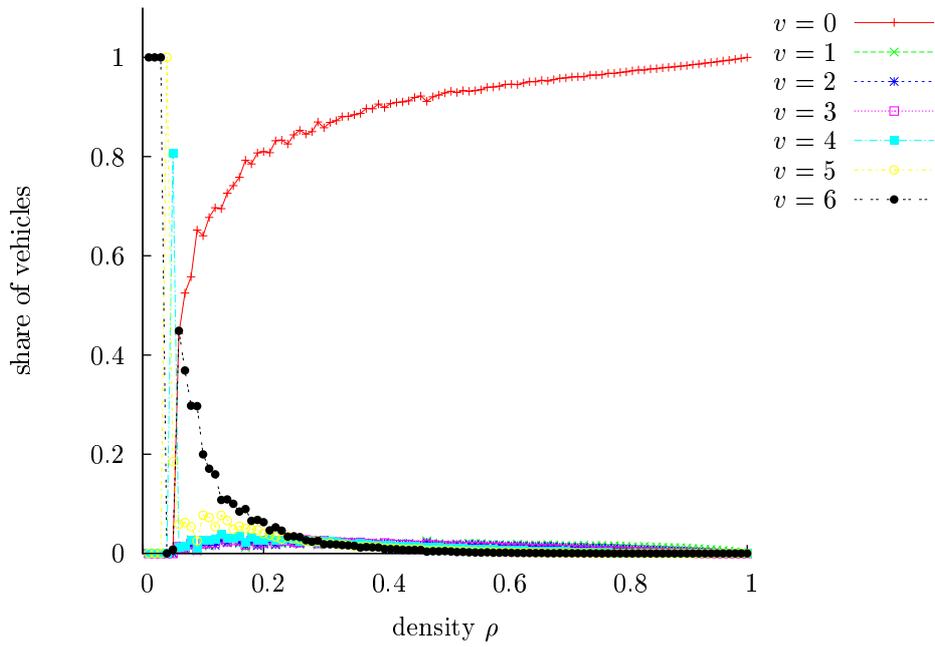


Fig. B.4: 占有率. ( $p_{acc}=0.2$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

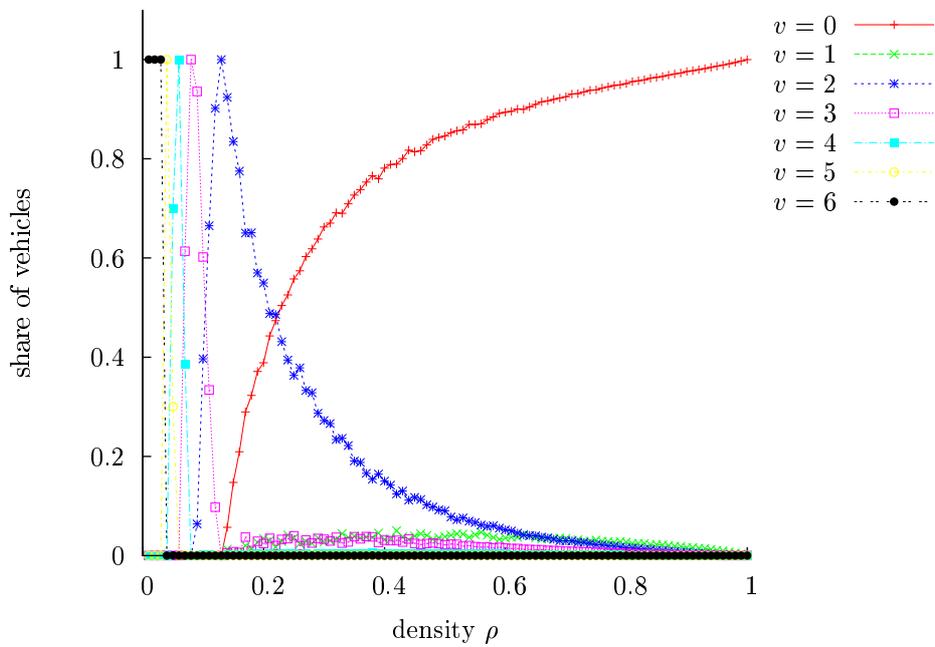


Fig. B.5: 占有率. ( $p_{acc}=0.3$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

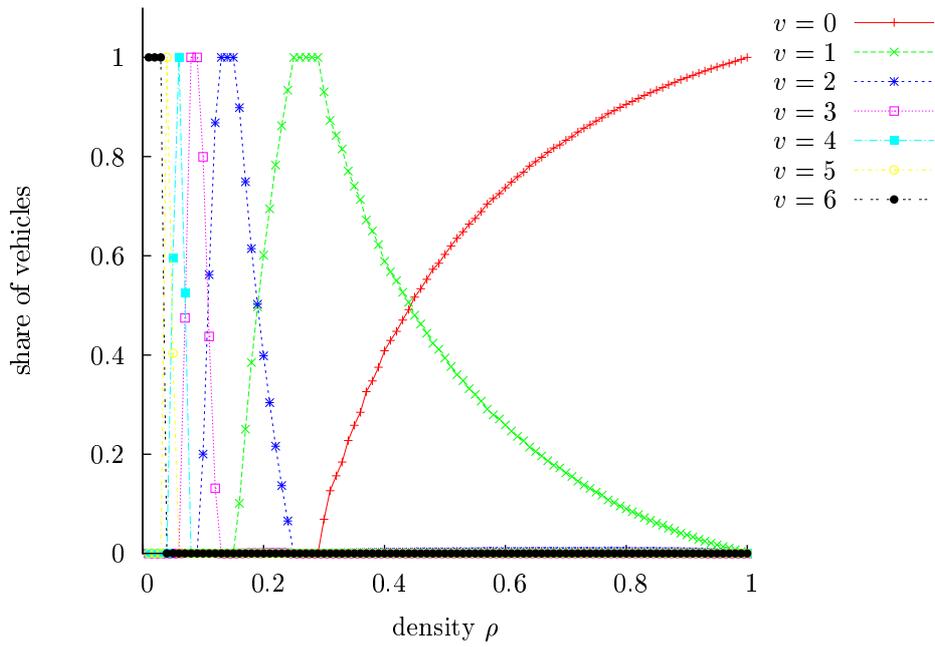


Fig. B.6: 占有率. ( $p_{acc}=0.4$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

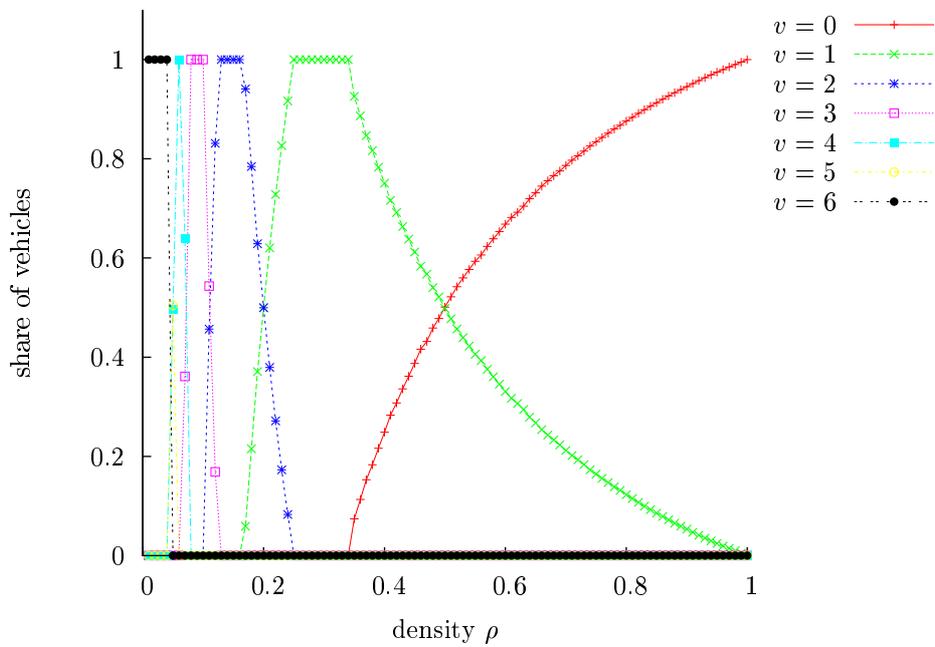


Fig. B.7: 占有率. ( $p_{acc}=0.5$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

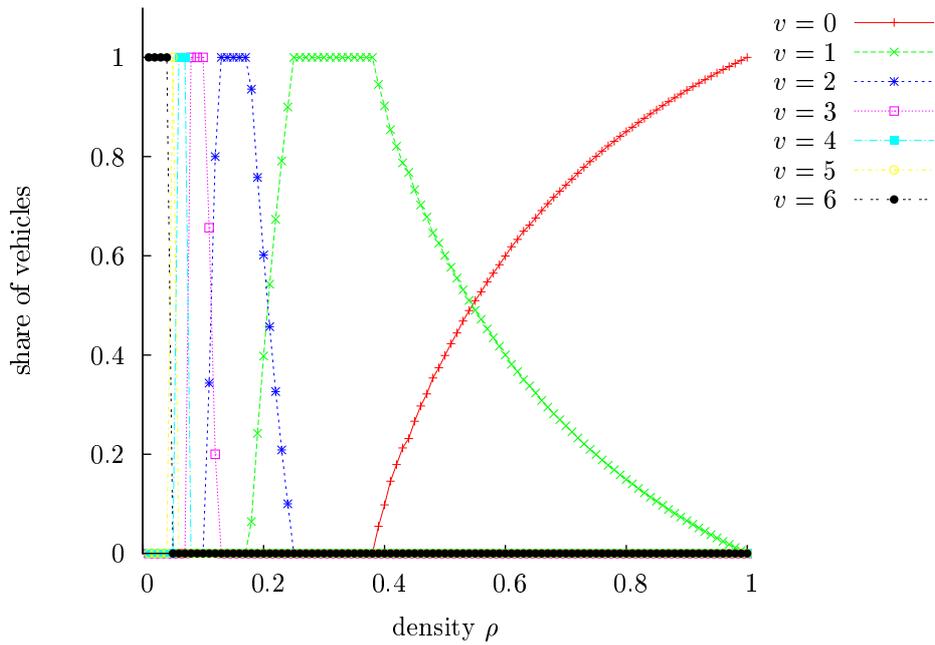


Fig. B.8: 占有率. ( $p_{acc}=0.6$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

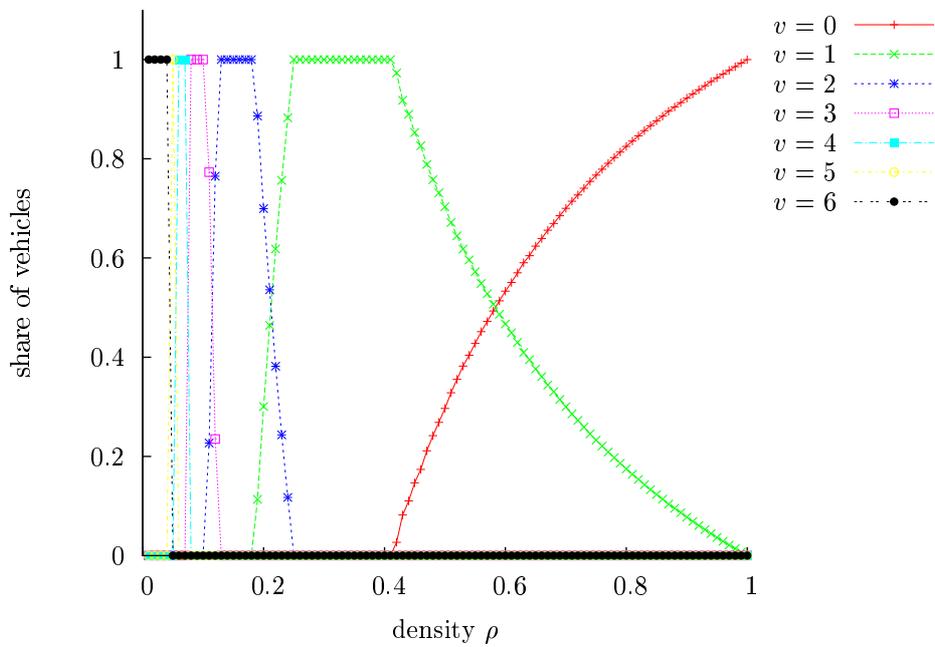


Fig. B.9: 占有率. ( $p_{acc}=0.7$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

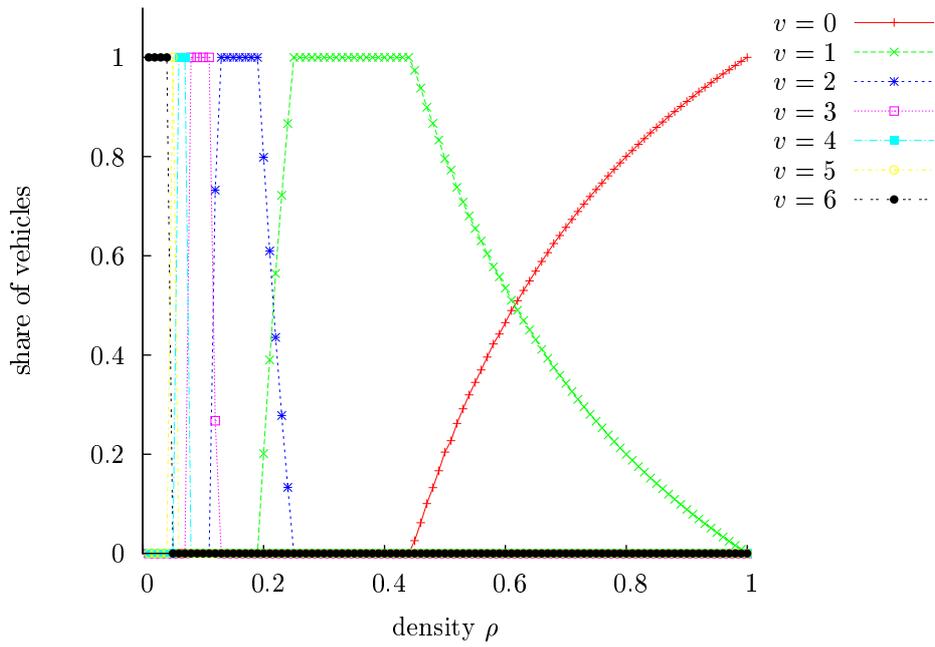


Fig. B.10: 占有率. ( $p_{acc}=0.8$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

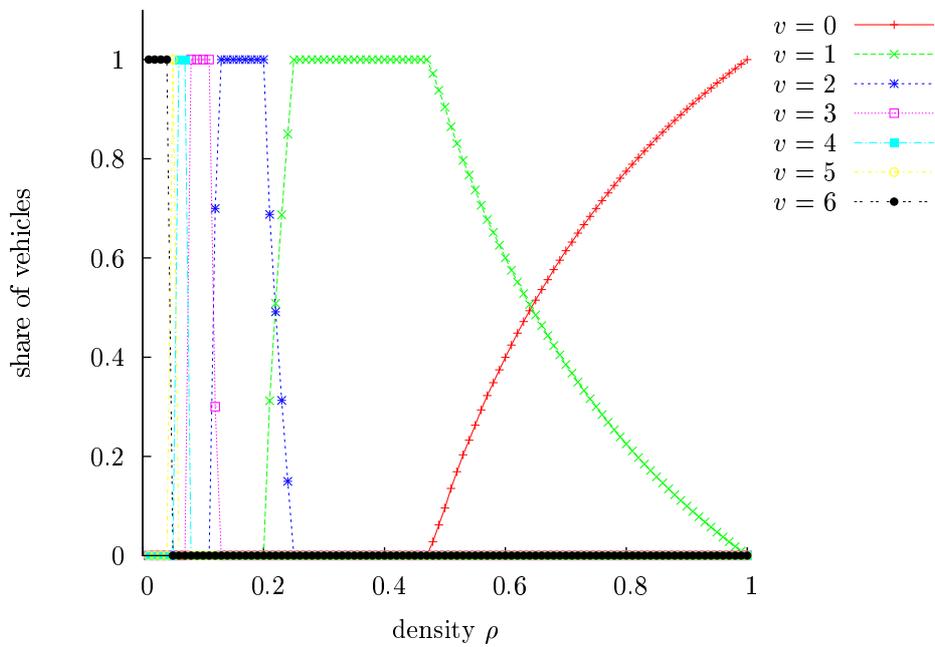


Fig. B.11: 占有率. ( $p_{acc}=0.9$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

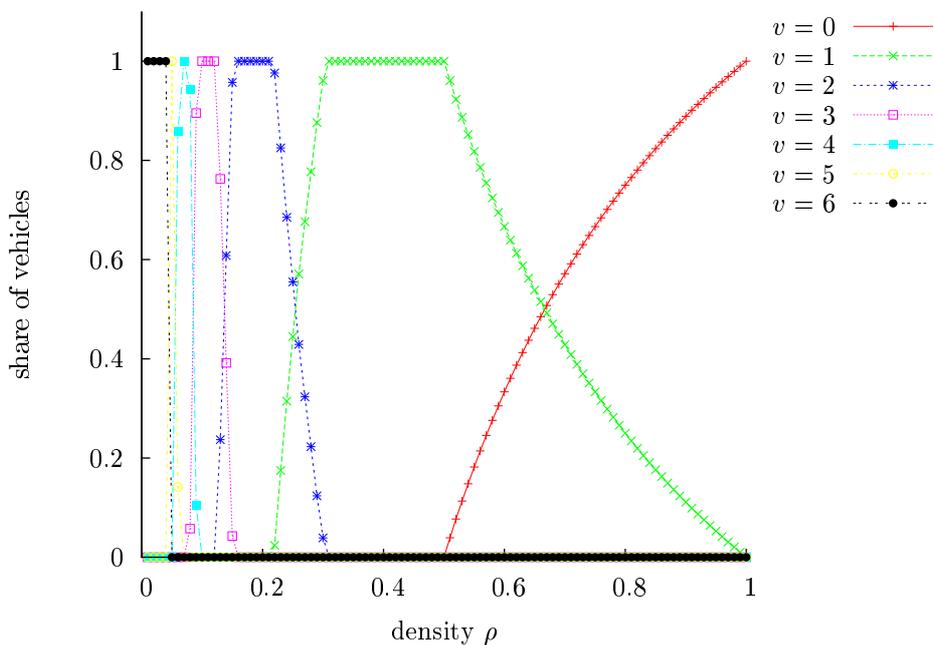


Fig. B.12: 占有率. ( $p_{acc}=1.0$  であり, 安全速度は  $\mu_1$  を用いた.)

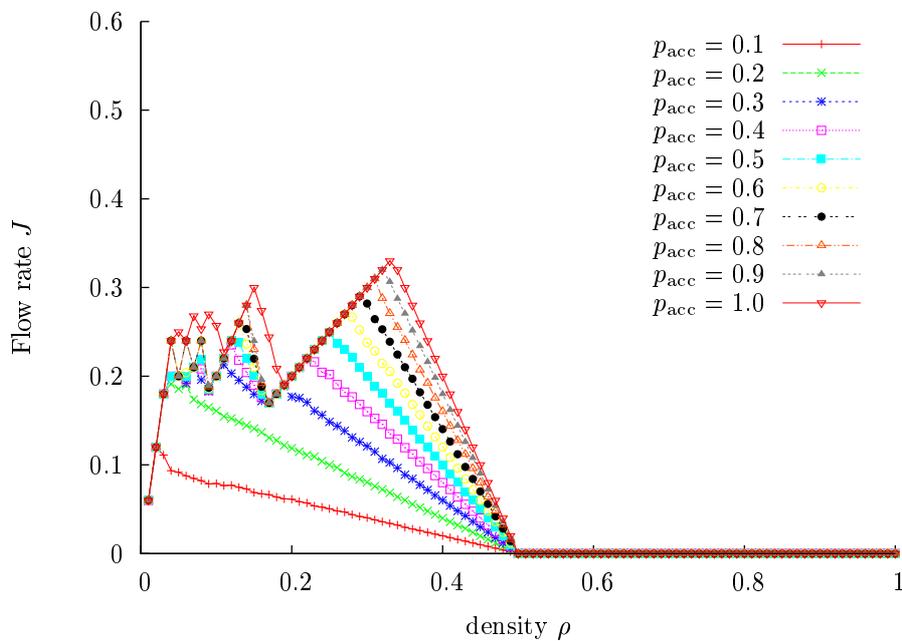


Fig. B.13: 周期境界条件下での各密度に対する基本図. (安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

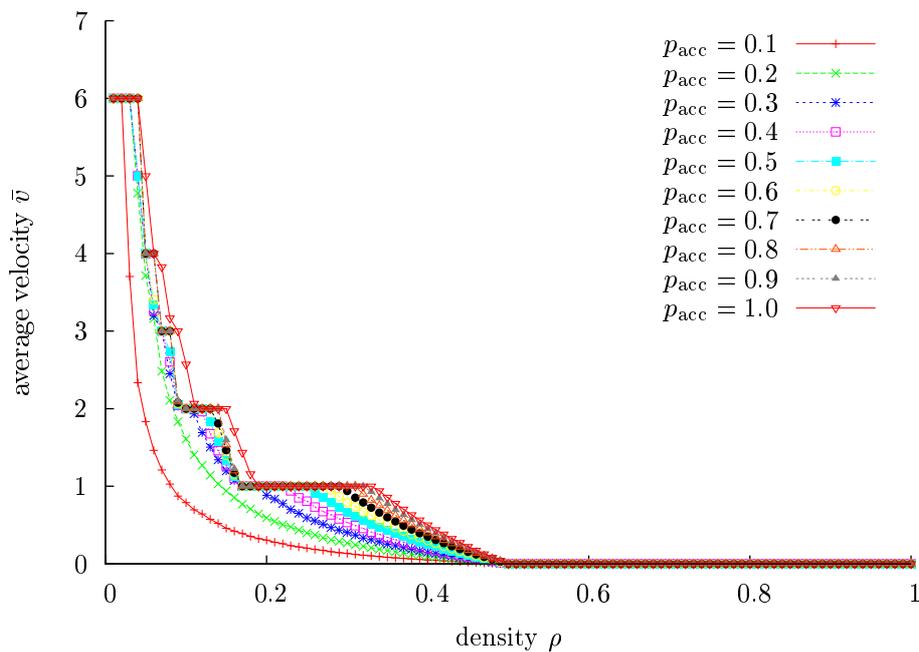


Fig. B.14: 周期境界条件下での各密度に対する平均速度. (安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

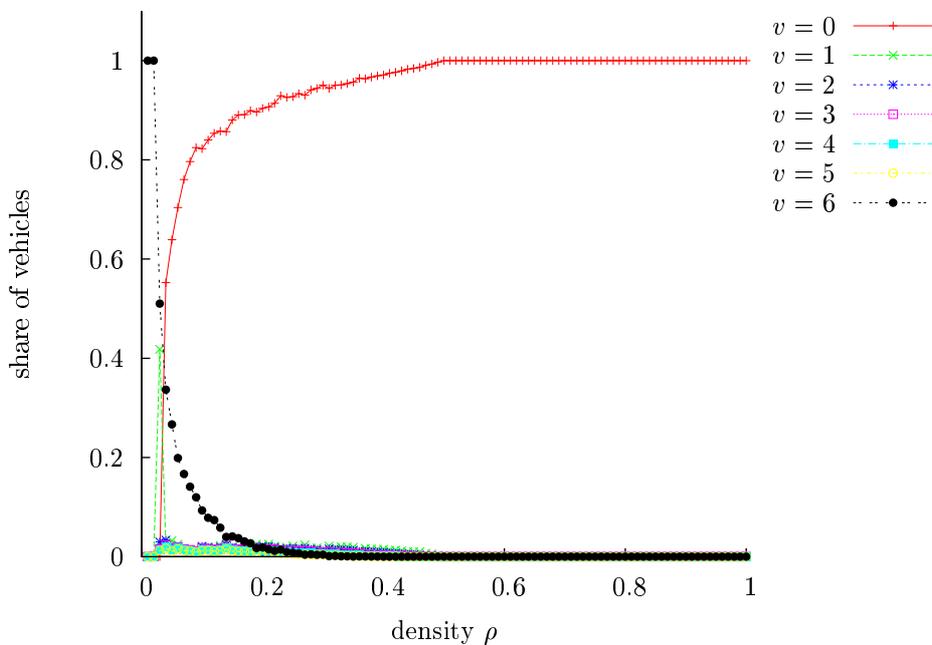


Fig. B.15: 周期境界条件下での各密度に対する占有率. ( $p_{acc}=0.1$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.) 各色の線が対応する速度を持つ車両の割合を示す.

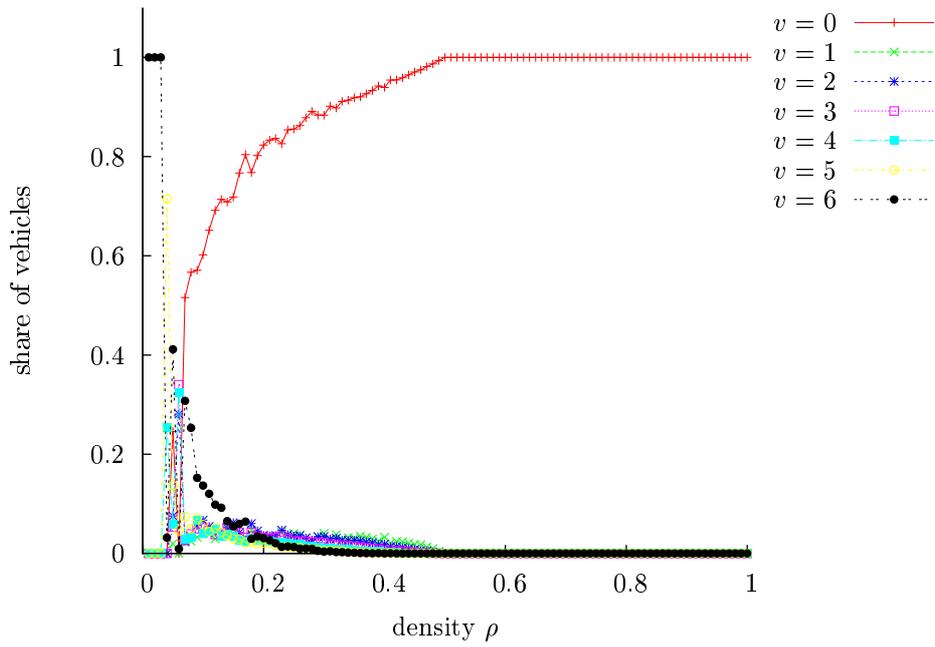


Fig. B.16: 占有率. ( $p_{acc}=0.2$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

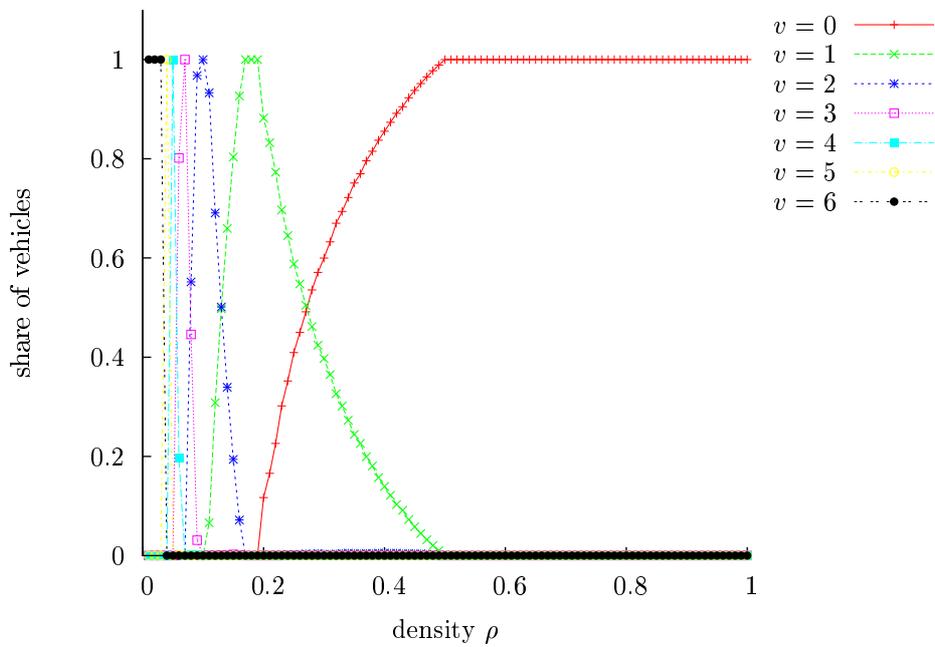


Fig. B.17: 占有率. ( $p_{acc}=0.3$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

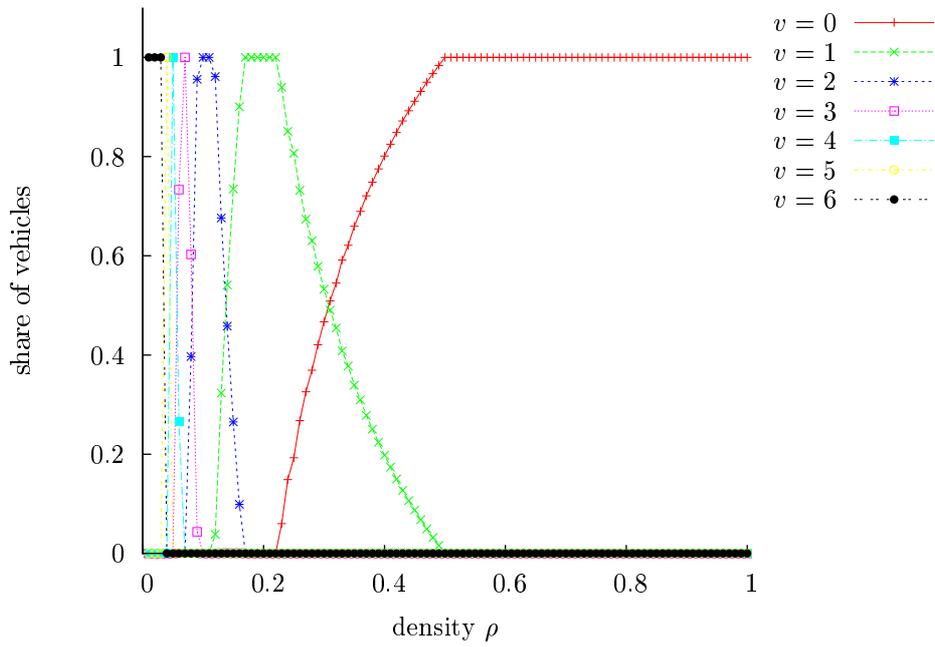


Fig. B.18: 占有率. ( $p_{acc}=0.4$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

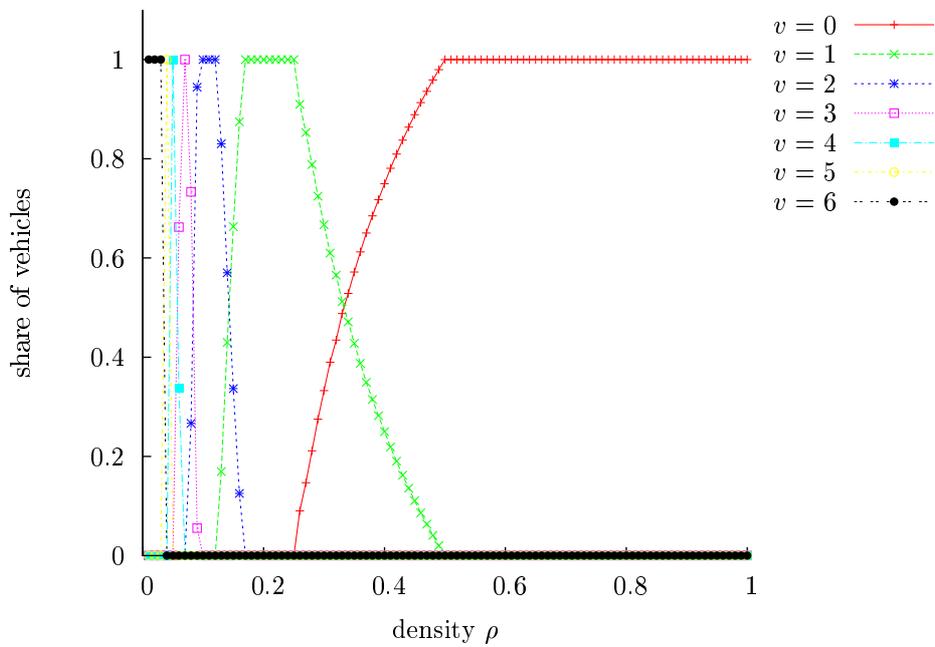


Fig. B.19: 占有率. ( $p_{acc}=0.5$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

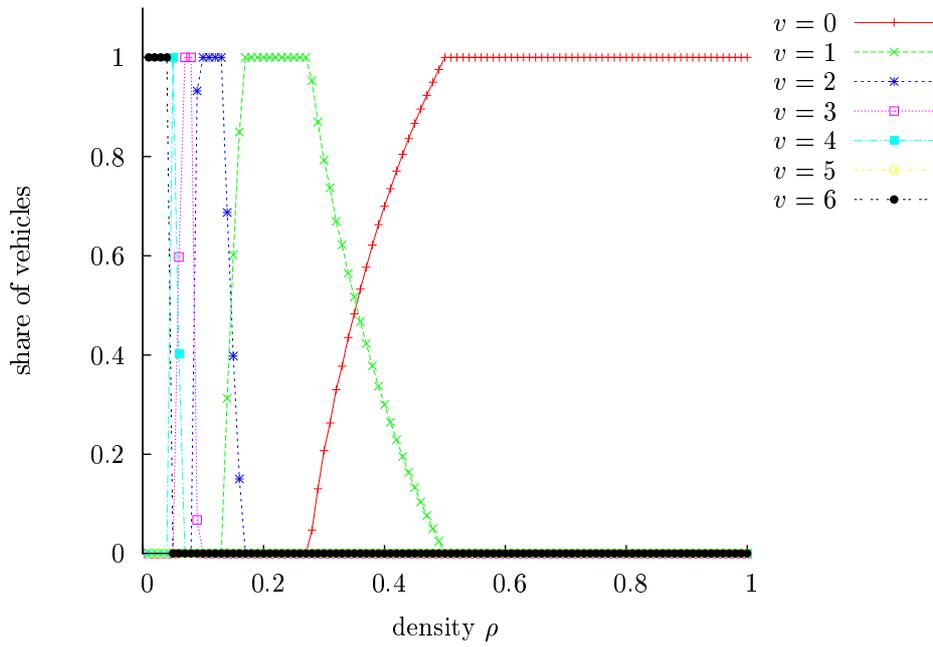


Fig. B.20: 占有率. ( $p_{acc}=0.6$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

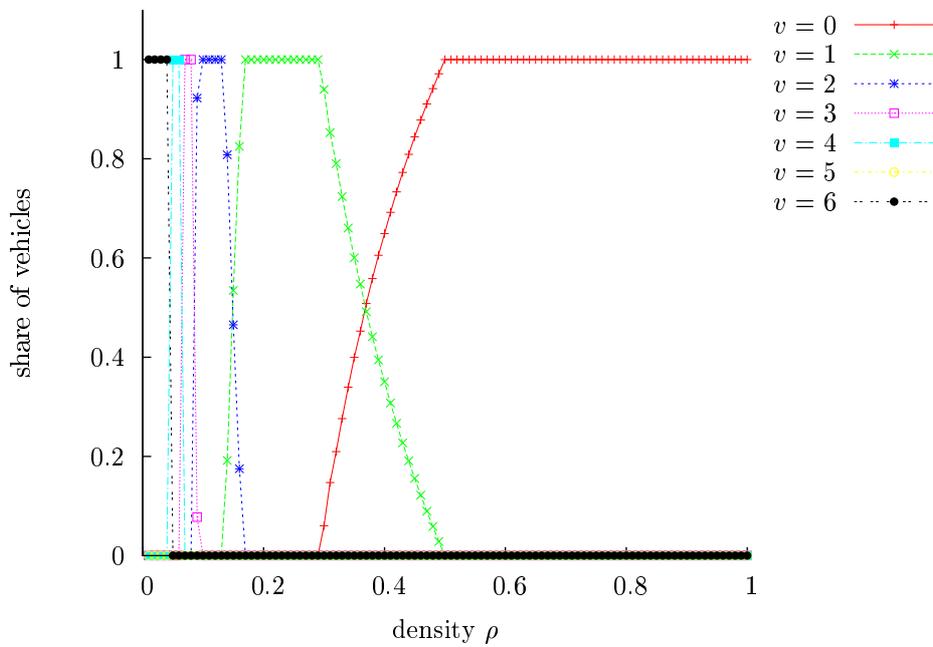


Fig. B.21: 占有率. ( $p_{acc}=0.7$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

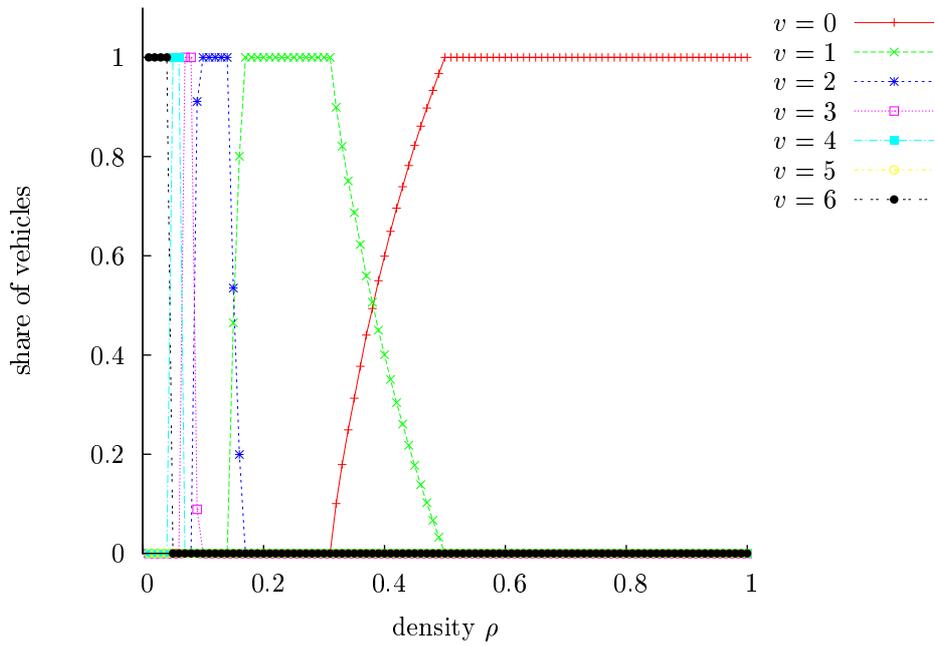


Fig. B.22: 占有率. ( $p_{acc}=0.8$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

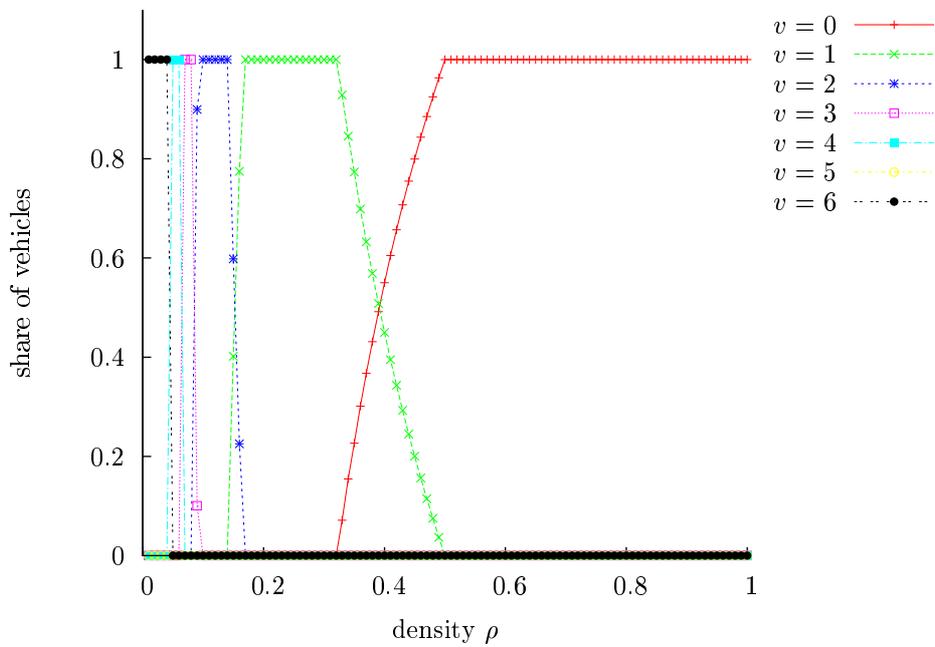


Fig. B.23: 占有率. ( $p_{acc}=0.9$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)

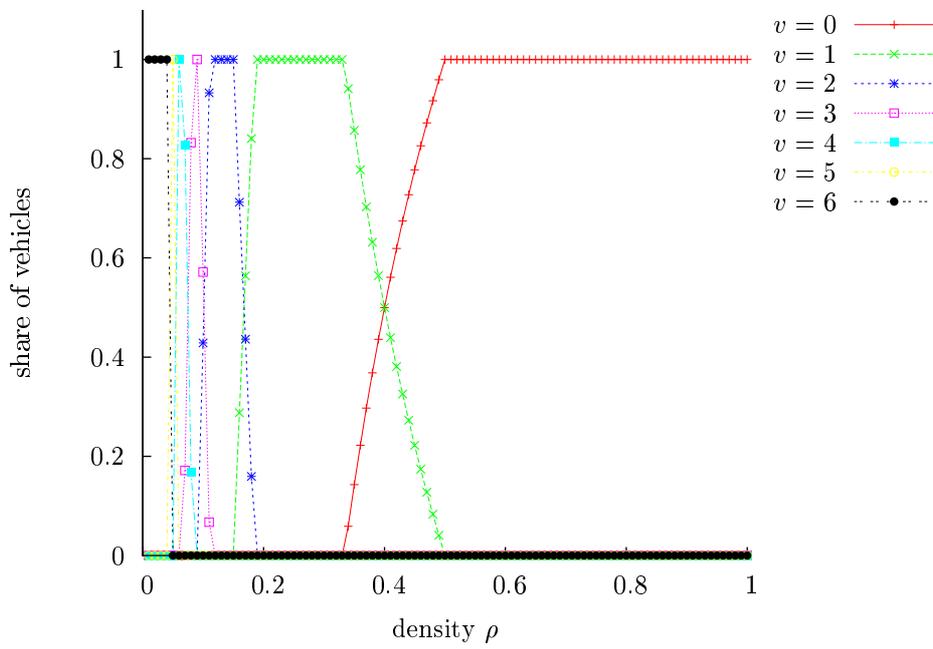


Fig. B.24: 占有率. ( $p_{\text{acc}}=1.0$  であり, 安全速度は  $\mu_2$  を用いた.)