

# 量子論における合成系の構造<sup>1</sup>

京都大学大学院 工学研究科 濱村 一航<sup>2</sup>

## 目次

第 1 章	はじめに	3
1.1	論文の目的	3
1.2	論文の構成	4
第 2 章	量子論の基礎にある問題	5
2.1	量子論の公理	5
2.2	一般的な理論の枠組み	5
2.3	古典論	11
2.4	量子論	12
第 3 章	合成系	15
3.1	合成系の定義	15
3.2	瞬間伝送禁止則	17
3.3	局所識別性	19
3.4	最小テンソル積と最大テンソル積	20
第 4 章	エンタングルメント	22
4.1	状態のエンタングルメント	22
4.2	エンタングルメント・ウィットネス	23
4.3	非正 POPT 状態	24
4.4	物理量のエンタングルメント	26
4.5	合成系の状態空間とエフェクト空間の双対性	29
第 5 章	Bell-CHSH 不等式	31

<sup>1</sup> この原稿は、修士の学位論文として京都大学に提出されたものに加筆・訂正を加えたものである。

<sup>2</sup> E-mail: hamamura@nucleng.kyoto-u.ac.jp

5.1	Bell の不等式と CHSH 不等式 . . . . .	31
5.2	Bell-CHSH 不等式の双対版 . . . . .	32
第 6 章	量子コンピュータ	36
6.1	量子コンピュータの動作原理 . . . . .	36
6.2	ジョセフソン接合 . . . . .	37
6.3	LC 共振器とジョセフソン接合 . . . . .	38
6.4	量子ビット . . . . .	39
第 7 章	実験	41
7.1	実験に利用する量子回路 . . . . .	41
7.2	実験結果 . . . . .	43
第 8 章	おわりに	46
8.1	まとめ . . . . .	46
8.2	議論 . . . . .	46

## 第1章 はじめに

最初に本論文の目的と構成について述べる。

### 1.1 論文の目的

現代物理学の基礎である量子物理学 (量子力学, 量子論) は工学においても理学においても極めて重要な理論であることは誰も否定しないだろう。例えば, 半導体や原子核は量子論なしに理解することは出来ないし, トポロジカル物質 [1] やホログラフィック原理 [2] といった近年研究されている興味深い物理現象は量子論が関わっていることが多い。一方で量子論は他の相対論や熱力学といった物理学とは大きく異なっている点がある。それは, 量子力学は数学的に導入されるという点である。量子論を語るためにはヒルベルト空間や自己共役作用素 (エルミート演算子) という言葉が必要である。初学時はヒルベルト空間ってなんだろう? 演算子は物理量なのだろうか? と思いながら, 計算方法に慣れ親しんでいくうちにこのような疑問を忘れてしまった人も少なくないと思われる。

物理のルールは実験的に, あるいは経験的に示すことができる物理的な原理から導出されるべきである。このことは量子物理学の一つ目のルールである各量子系に付随するヒルベルト空間についても同様であり, 数学的对象であるヒルベルト空間も, 何か物理的な原理から導出されるべきである。あとで述べるように, ヒルベルト空間の導出を物理的なあるいは情報的な公理から行なったという研究はいくつか存在する。しかし, ヒルベルト空間の導出に万人が納得するような方法は未だ見つからないので, まだまだ探求していく余地はあるだろう。一つ目のルールであるヒルベルト空間が導出できれば, 状態空間や物理量としての自己共役作用素, ボルンの規則などはすぐに導出できる。一方で, たとえ量子論の最小単位である量子ビット系においてヒルベルト空間の導出が完了したとしても, 本論文の主題である合成系の規則は明らかではない。合成系の規則とは量子論の合成系はヒルベルト空間のテンソル積で記述されるという規則である。合成系がテンソル積ヒルベルト空間になるということは, 量子論の合成系が再び量子論で記述されるということである。この規則を用いて, 角運動量の合成や量子多体系の議論ができるようになった。さらにこの規則から, 量子情報処理の資源として重要な量子エンタングルメントが示唆される。したがって, 合成系の規則を理解することは, 量子論の基礎を理解し量子技術へ応用していくにあたって最も重要な課題である。

合成系の規則が導出できないと述べたが, それはどういった事情によるものだろうか。実はいくつかの物理的な原理から合成系の候補を絞ることは可能である。しかし, 物理原理から合成系の候補を一意に定める方法は今のところ存在しない。これは, 局所系が量子論であるということが導出できたとしても, 解決する問題ではない。そこで, 本論文では次の1つの問題に対しての考察を行なう。

問. 量子論の合成系はヒルベルト空間のテンソル積でなくてはならないのだろうか。

この論文では2つの局所系からなる合成系に関する先行研究をまとめる。さらに, 既存の結果よりも合成系の候補を狭める理論を構築した。合成系の候補ではあるが, ヒルベルト空間のテンソル積の

合成系とは異なる合成系において成り立つ不等式を導出し、量子コンピュータを用いて、その不等式の破れを実験した。

## 1.2 論文の構成

第2章では量子論の基礎にある問題を明らかにし、その後の議論で用いる基本的な言葉を導入していく。この論文では一般化確率論 (Generalized Probabilistic Theories)<sup>3</sup>を背景に理論を構築する。ここで導入する量子状態からなる空間である状態空間や物理量の構成要素となるエフェクト空間や、状態空間とエフェクト空間の双対性が重要である。第3章では、量子論の合成系についての先行研究をまとめる。ここで重要な役割を果たすのが、瞬間伝送禁止則と局所識別性という物理的に自然な規則である。第5章では、量子論のエンタングルメントとその検出方法について議論する。さらに、状態に関して定義されていた概念であるエンタングルメントを、物理量にも拡張する。第6章では実験に用いた量子コンピュータの動作原理についてレビューを行ない、第7章では実際に行なった実験の構成と実験結果について述べる。最後に、第8章で全体のまとめを述べる。

---

<sup>3</sup> 理論的に可能な操作を認めていくアプローチなので、操作論的アプローチ (Operational Approach) と呼ばれたり、凸構造や凸集合を理論の中心に据えているので Convex Approach と呼ばれたりすることがある。また日本語では一般確率論と呼ぶこともある。

## 第2章 量子論の基礎にある問題

本研究の目的は量子論の公理(ルール)の1つである, 合成系の公理を物理的に理解することにある. 量子論のルールは熱力学<sup>4</sup>や相対論<sup>5</sup>とは異なり, 物理的な原理ではなく数学的な言葉で導入されている. この点は量子論の公理が整備された, 1930年代から問題意識はあった<sup>6</sup>ものの, 現在に至るまで誰もが納得する共通の見解はない<sup>7</sup>.

### 2.1 量子論の公理

量子論の公理, あるいは量子論のルールは von Neumann[4] によって定式化された. まず, その公理についてまとめる.

公理 2.1 (量子論の公理). 各物理系には可分なヒルベルト空間が付随し, その単位ベクトルは系の可能な物理的状態に対応する. 測定ごとにランダムな値を出力する物理量は自己共役作用素で表され, その自己共役作用素のスペクトルは可能な測定出力に一致する. 自己共役作用素  $A$  の定義域に含まれる単位ベクトル  $|\psi\rangle$  で表される状態を準備したとき, その物理量  $A$  を測定したときの期待値は  $\langle\psi|A\psi\rangle$  となる.

この量子論の公理は, 熱力学の法則や相対論の原理に比べると, 随分数学的である. そもそも, ヒルベルト空間や自己共役作用素は物理的に何を意味するのかこの「量子論の公理」からすぐにはよく分からない. したがって, より物理的なルールから量子論のルールを書き直したいという欲求は自然なものだろう. これは量子論がヒルベルト空間ありきで定式化されてから現代に至るまでずっと残されている課題なのである.

### 2.2 一般的な理論の枠組み

量子論とよく対比されるのは古典論である. 上の「公理」において, 古典論においても同様にある物理的な性質を抽出してみると次のようなものになるだろう.

原理 2.2 (一般的な理論の原理). 状態を準備し物理量を測定すると, 確率的に測定出力が得られる.

この状況を図 1 に示す.

<sup>4</sup> 熱力学は「第0法則:系 A と B, B と C がそれぞれ熱平衡ならば, A と C も熱平衡にある.」「第1法則:エネルギー保存則.」「第2法則:エントロピー増大の法則.」「第3法則:絶対零度でエントロピーは0となる.」という法則から成る. これらと同値な法則についてもよく知られているが, いずれも物理的に, 経験的に理解されている法則である.

<sup>5</sup> 特殊相対性理論では, 光速不変の原理や相対性原理を要請する. 一般相対性理論では一般相対性原理と等価原理, 一般共変の原理を原理としている.

<sup>6</sup> von Neumann は Birkhoff への 1935 年の手紙において “I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more.” と言っている. その後, von Neumann と Birkhoff は 1936 年に量子論理に関する論文を出している [3].

<sup>7</sup> 共通の合意を作るためには何が物理原理なのかという問題も関わっているので難しい.

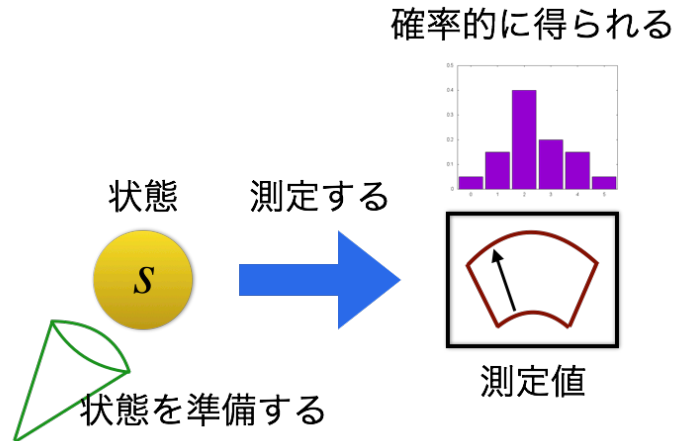


図 1: 状態の準備と物理量の測定

もちろん、古典論もこの性質を満たしている。例えばサイコロを考えよう。サイコロを振って(すなわちサイコロという物理系において状態を準備して)、上側の目を見ると(物理量を測定すると)、確率的に(同様に確からしいサイコロならば各目がでる確率は  $1/6$  で)測定値が得られる。ヒルベルト空間やそれに作用する作用素は数学的であると同時に、量子論特有の性質であり、古典論を議論する際にはヒルベルト空間は必要がないことが先の議論から読み取れる。

図 1 の単純な状況でも、状態や測定といった様々な言葉が出てきた。それぞれの性質について順に考えていくが、まず最初に測定値(測定出力)の集合の満たすべき性質について考えることにする。Kolmogorov 流の確率論では測定値の集合や確率を次のように定式化する。 $\Omega$  を標本空間(測定出力の空間)をあらわす集合とする。先のサイコロの例ならば、 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  が標本空間である。可算和と補集合に関して閉じている  $\Omega$  の部分集合の族を  $\sigma$  加法族(あるいは完全加法族)といい、本論文では  $\mathcal{F}$  とかく。標本空間  $\Omega$  の部分集合を考える理由は、先のサイコロの例では明らかだろう。サイコロを振ったときに 1 が出る確率を考えたいのは当然であるが、1 または 2 が出る確率も考えたい。すなわち、 $\{1\}$  だけじゃなくて、 $\{1, 2\}$  についても確率を定義したいからである。この標本空間  $\Omega$  の部分集合のことを事象という。補集合に閉じているというのは、 $X$  が起こる確率と同時に  $X$  が起こらない確率も定義したいということに由来する。確率測度  $p: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  は、全事象  $\Omega$  が起こる確率が 1 で<sup>8</sup>、可算個の背反事象に関して和法則が成り立つ<sup>9</sup>。本論文では簡単のため  $\Omega$  が有限集合の場合を考える。

量子論においても、状態を準備し測定する物理量を決めれば、同様の構造が現れる。状態  $s$  を準備し、物理量  $A$  の測定を行なうとする。このとき測定する物理量  $A$  に応じて測定出力の空間  $\Omega_A$  と完全加法族  $\mathcal{F}_A$  が決まる。そして、 $p(X) = \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s]$  が確率測度となる<sup>10</sup>。

<sup>8</sup>  $p(\Omega) = 1$ .

<sup>9</sup> 事象  $X_i$  と  $X_j$  が背反であるとは  $X_i \cap X_j = \emptyset$  が成り立つことを表す。このような事象の組に対して、和法則  $p(\cup_{i \in \mathbb{N}} X_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(X_i)$  が成り立つ。

<sup>10</sup> この確率測度は量子論では次のように計算できる。 $s$  を状態(トレースが 1 の正作用素)、 $E^A$  を自己共役作用素  $A$  に対応するスペクトル測度であるとする。このとき、 $X$  が起こる確率は  $p(X) = \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s] = \text{tr}[sE^A(X)]$  のように

ところで、この状態や(物理量の)測定というのは、状態を準備する方法や物理量の測定方法に依存しているものである。しかし、たとえ異なる方法で準備を行なったとしても、同じ測定値を返すことがある。例えば、サイコロを右手で振っても左手で振っても確率は変わらないはずである。また、実験を行なう時間やその日の天気、温度によって、サイコロの確率分布は変わらないのが理想的である。こういう場合は、それらの状態は同じであると考えられる。状態が同じという概念を定義するためには状態が異なるという概念を定義する必要がある。このために、物理量の測定を用い、状態を識別することを考える。

定義 2.3 (状態の識別).  $A$  を物理量,  $\mathcal{F}_A$  を物理量  $A$  に対応する完全加法族とする.  $s_1, s_2$  を状態とする.  $\Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_1] \neq \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_2]$  なる事象  $X$  が存在するとき, 物理量  $A$  の測定によって状態  $s_1$  と状態  $s_2$  が識別可能であるという.

この状態の識別を用いて、状態の同値関係を考える。

公理 2.4 (状態の同値関係). いかなる物理量を測定しても識別できない状態は同じ状態であるとする。

任意の実験で区別できないものを同じとみなしてしまおうというのが、上の状態の同値関係である。同様にして物理量の測定にも同値関係を入れることができる。

公理 2.5 (物理量の同値関係). すべての状態  $s$  に対して、物理量  $A$  と  $B$  が同じ確率分布を返すならば、物理量  $A$  と  $B$  は同じ物理量とみなす。

このような同値関係で状態や物理量の集合を割ることによって、異なる時間や場所で実験したとしても、同じ状態について考えることが出来るようになる。

状態が満たすべき性質をさらに詳しく調べていく。次の「状態の混合」が状態に関する最も重要な性質である。

公理 2.6 (状態の混合). 状態の集合を  $S$  とする. 確率  $p \in [0, 1]$  で状態  $s_1$  を準備し, 確率  $1 - p$  で状態  $s_2$  を準備するとする. このとき,  $s_1$  と  $s_2$  を確率的に混合した状態もまた状態である. すなわち,  $p, s_1, s_2$  と物理量  $A$  に対して,  $p \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_1] + (1 - p) \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_2] = \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s]$  を満たす状態  $s$  が存在する.

この状態  $s$  は  $p, s_1, s_2$  に対して一意に定まる。なぜならば、 $s \neq s'$  に対して、 $\Pr[X \in \mathcal{F}_A | s] = \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s'] = p \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_1] + (1 - p) \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s_2]$  が任意の物理量  $A$  に対して成り立つとすると、これは状態の同値関係から  $s = s'$  であり、矛盾が生じるからである。一意に決まるので  $s = \langle p; s_1, s_2 \rangle$  と書くことにする。同じ状態  $s$  を混合してもやはり状態は  $s$  であるべきである。すなわち  $s = \langle p; s, s \rangle$  であるということも要請する。これらの構造が入った状態の集合  $S$  を凸構造という。さらに、可算無限個の状態の混合を考え、適切に収束を定義した集合  $S$  を  $\sigma$ -凸構造というが、 $\sigma$ -凸構造の説明は今後

---

計算できる。この規則を一般化ボルの規則という。状態が純粋状態、すなわち  $s = |\psi\rangle\langle\psi|$  の場合は  $\text{tr}[sE^A(X)]$  はさらに簡単に  $\text{tr}[sE^A(X)] = \langle\psi|E^A(X)\psi\rangle$  となる。

の議論で用いないので省略する.

写像  $f(s) := \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s]$  の満たすべき性質について考える. 状態の混合から,  $f(\langle p; s_1, s_2 \rangle) = pf(s_1) + (1-p)f(s_2)$  という性質を満たさねばならない. 任意の確率  $p$  と状態の組  $s_1, s_2$  に対して, この性質が成り立つとき,  $f$  はアフィンであるという. 特に,  $f$  は実数への写像なので, アフィン汎関数である. アフィン汎関数全体の集合を  $S^*$  と書く.

次の特別なアフィン汎関数は重要である. 任意の状態  $s$  に対して  $0(s) = 0$  を満たす  $0$  と, 任意の状態  $s$  に対して  $u(s) = 1$  を満たす  $u$  である. これらはあとでエフェクトを定義する際に用いるが, これら自身もエフェクトであるため, それぞれゼロエフェクト, 単位エフェクトと呼ばれる.

アフィン汎関数には自然に順序が入る.  $f, g \in S^*$  に対して, 任意の  $s \in S$  に対して  $f(s) \leq g(s)$  が成り立つとき  $f \leq g$  という関係を定義する. この関係はベクトル順序 (vector ordering) となっている. ベクトル順序とは前順序 (任意の  $x \in X$  について  $x \leq x$  で,  $x \leq y$  かつ  $y \leq z$  ならば  $x \leq z$  を満たす二項関係) でベクトル空間の構造と両立するために次の二つの条件を満たすものである.

- 並進不変性 ( $x \leq y$  ならば  $x + z \leq y + z$  が成り立つ).
- 非負のスカラ一倍に対する不変性 ( $x \leq y$  かつ  $\mathbb{R} \ni a \geq 0$  ならば  $ax \leq ay$ ).

さきほど導入したアフィン汎関数の関係はベクトル順序となっている. すなわち, アフィン汎関数  $f, g, h$  は任意の  $s \in S$  について  $f(s) \leq f(s)$  なので  $f \leq f$  で, 任意の  $s \in S$  について  $f(s) \leq g(s)$  かつ  $g(s) \leq h(s)$  ならば任意の  $s \in S$  について  $f(s) \leq h(s)$  が成立し, 任意の  $s \in S$  について  $f(s) \leq g(s)$  が成り立つならば,  $(f + h)(s) = f(s) + h(s) \leq g(s) + h(s) = (g + h)(s)$  が成り立つので並進不変性があり,  $f(s) \leq g(s)$  ならば実数  $a \geq 0$  に対して  $af(s) \leq ag(s)$  が成り立つので非負のスカラ一倍について不変である. さらに, 物理量の同値関係から, この順序は半順序 ( $f \leq g$  かつ  $f \geq g$  ならば  $f = g$ ) であることが示せる.

このベクトル順序とゼロエフェクト, 単位エフェクトを用いることでエフェクト空間を定義する. エフェクトとは物理量を構成する要素であり, 状態空間の総対概念である.

定義 2.7 (エフェクト空間). 状態空間  $S$  に対して, エフェクト空間  $E(S)$  を次のように定義する.

$$E(S) = \{ e \in S^* \mid 0 \leq e \leq u \}.$$

エフェクト空間の元をエフェクトという. また状態空間  $S$  が明らかであるときは  $S$  は省略して  $E$  と書くこともある. エフェクト空間の端点は, 命題と呼ばれることもある<sup>11</sup>. もともと考えたかった写像  $f(s) = \Pr[X \in \mathcal{F}_A | s]$  は確率の正值性と全確率が 1 であることからエフェクトである.

このエフェクト空間を用いて, 物理量 (観測量, observable) を次のように定義する.

定義 2.8 (物理量).  $(\Omega, \mathcal{F})$  を可測空間であるとする.  $S$  を状態空間 (凸構造),  $E(S)$  を状態空間  $S$  に対応するエフェクト空間とする. 物理量とは  $A: \mathcal{F} \rightarrow E(S)$  で次の性質を満たす写像である.

1.  $A(\Omega) = u$ .

<sup>11</sup> 命題という言葉は量子論理に由来する.



2. 任意の互いに素な列  $X_i \in \mathcal{F}$  に対して,  $A(\cup X_i) = \sum A(X_i)$  が成り立つ<sup>12</sup>.

つまり, 物理量とはエフェクト値測度のことである. 物理量の概念を用いると, よりクリアに確率  $\Pr[X \in \mathcal{F}_A | s]$  が理解できる. すなわち,  $\Pr[X \in \mathcal{F}_A | s] = (A(X))(s)$  である.  $p(X) = (A(X))(s)$  は確率測度となっている. 物理的には状態  $s$  を準備して, 物理量  $A$  を測定したときに, 事象  $X$  が起こる確率は  $(A(X))(s)$  と解釈できる.  $X = \{x\} \in \mathcal{F}_A$  の場合には  $A(\{x\}) = A_x$  と書くこともある.

$S^*$  は各点での演算で実線型空間であるから,  $S^{**}$  も実線型空間である. 標準的な埋め込み  $J: S \rightarrow S^{**}$  を考える. これは任意の  $s \in S, f \in S^*$  に対して  $J(s)f = f(s)$  と定義されるものである. この写像  $J$  は  $S$  から  $S^{**}$  の凸部分集合  $J(S)$  へのアフィン同型であるので,  $S$  と  $J(S)$  を同一視することで,  $S$  を凸集合であるとみなすことができる. すなわち,  $S^{**}$  で状態  $s = \langle p; s_1, s_2 \rangle$  は  $J(s) = J(\langle p; s_1, s_2 \rangle) = pJ(s_1) + (1-p)J(s_2)$  と書けるから, 同一視を行なうと  $s = ps_1 + (1-p)s_2$  と書くことができる. 凸集合とはこの凸結合の操作で閉じた集合である (図 2).

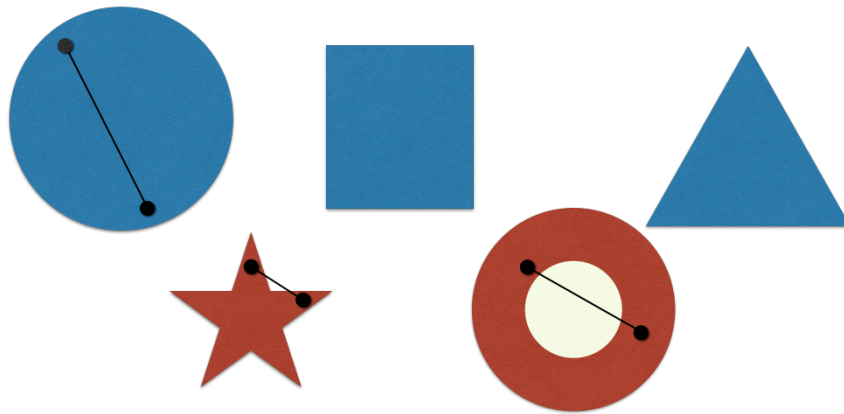


図 2: 凸集合と凸集合でない集合の例: 青い図形が凸集合の例である. 赤い図形が凸集合ではない集合である. 図の黒丸は状態を表しており, 黒線は凸結合を表現している. 青い図形の線分は青い図形上にあるが, 赤い図形の線分は赤い図形からはみ出ている.

簡単のため状態空間  $S$  はユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  に埋め込み, そこでコンパクトであるとする<sup>13</sup>. したがって, 状態空間  $J(S) \cong S$  は空でないコンパクトな凸集合である. 状態には純粋状態と混合状態の二種類がある. 純粋状態は他の状態の  $p \in (0, 1)$  の確率混合から作れない状態であり, 混合状態は他の状態の  $p \in (0, 1)$  の確率混合から作れる状態である. すなわち, 純粋状態は状態空間  $S$  の端点である. Krein-Milman の定理から, 任意の混合状態は純粋状態を確率混合 (凸結合) して準備できることが分かる.

ここで登場した概念で重要なのは状態空間  $S$  とエフェクト空間  $E(S)$ , それらの間の双対性である. 状態空間  $S$  を決めると,  $S$  に対するアフィン汎関数とアフィン汎関数のベクトル順序からエフェクト空間が定まる. 逆にベクトル順序を用いて  $E = [0, u]$  という空間を定めると, 状態空間としてこ

<sup>12</sup> ここで無限和も考えられるが, 無限和の収束については  $S^*$  の弱\*位相での収束で定義する.

<sup>13</sup> 「有限個の物理量を有限個の測定出力について有限の誤差で測定できる」ということから導入される位相を物理的位相という. 状態空間は物理的位相でコンパクトになる [5].

れをエフェクト空間にもつようなものが一意的に定まる. このエフェクト空間に対して, 状態空間  $S(E)$  は,

$$S(E) = \{ s \in V(E)^* \mid s(e) \geq 0, \forall e \in E, s(u) = 1 \}$$

と定義される. ここで用いた  $V(E)$  は  $E$  が生成するベクトル空間とする. この  $S(E)$  は再びコンパクト凸集合となる.

エフェクト空間から状態空間を作ることが出来るようになったのである. したがって, 状態空間からエフェクト空間を作って, さらにそのエフェクト空間から状態空間を作るといような操作が考えられるが, このようにして作られた状態空間は元の状態空間と同じ状態空間になるのだろうか.

定理 2.9.

$$S(E(S)) = J(S) \cong S$$

が成り立つ.

この定理の証明には有名な Hahn-Banach の分離定理を用いる.

補題 2.10 (Hahn-Banach の分離定理). 体  $K$  を  $\mathbb{R}$  または  $\mathbb{C}$  であるとする.  $V$  を  $K$  上の局所凸空間 ( $LCS$ ),  $A$  と  $B$  を互いに素な  $V$  の凸部分集合であるとする.  $A$  をコンパクト,  $B$  を閉であるとする. このとき, 任意の  $a \in A, b \in B$  に対して,

$$\operatorname{Re} f(a) < \lambda < \lambda + \epsilon < \operatorname{Re} f(b)$$

なる連続線型汎関数  $f: V \rightarrow K$  と  $\lambda \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$  が存在する.

証明. (定理の証明)

$J(s)e = e(s) \geq 0$  と  $J(s)u = u(s) = 1$  から  $S(E(S)) \supset J(S)$  である.

$S(E(S)) \subset J(S)$  を示す.  $S(E(S)) \supsetneq J(S)$  であるとする.  $s' \in S(E(S)) \setminus J(S)$  なる元が取れる.  $s'$  と  $J(S)$  について Hahn-Banach の分離定理を用いると, 任意の  $s \in J(S)$  に対して  $f(s) \geq 0$  かつ  $f(s') < 0$  となるような  $f$  が存在する. いま,  $J(S)$  がコンパクトなので,  $f(s)$  に最大値が存在し, その最大値で  $f$  を割ったものを  $f'$  とする. したがって,  $s(f')$  の最大値は 1 である. 標準的な同型を用いて,  $f''$  を  $s(f'') = f'(s)$  と定義する. このとき,  $s \in J(S)$  について,  $0 \leq s(f'') \leq 1$  を満たすので,  $f''$  はエフェクトである.  $s' \in S(E(S))$  なので, 任意のエフェクト  $e$  について  $s'(e) \geq 0$  であるはずだが, いま  $s'(f'') \leq 0$  なので, 矛盾している.  $\square$

また, エフェクト空間から状態空間を作って, さらにその状態空間からエフェクト空間を作ることにも可能である.

定理 2.11.

$$E(S(E)) \cong E$$

証明. 任意の  $s \in S(E)$  について, 状態空間の定義より  $s(u) = 1$ , エフェクト空間の定義より  $u'(s) = 1$  と  $0'(s) = 0$  である. また,  $s$  の線型性から  $s(0) = s(0 \cdot e) = 0s(e) = 0$  なので, 任意の  $s \in S$  につい

て  $s(0) = 0$  である。したがって、 $E(S(E))$  と  $E$  のゼロエフェクトと単位エフェクトはそれぞれ対応している。

$e \in E$  とする。ここで、 $e' \in E(S(E))$  を自然な同型  $e'(s) = s(e)$  で定義すると、 $s \in S(E)$  について状態空間の定義から  $0 \leq s(e) \leq 1$  なので  $0 \leq e'(s) \leq 1$  である。したがって、 $e' \in E(S(E))$  である。

つぎに、 $e' \in E(S(E))$  とする。このとき、 $e'' \in E$  を自然な同型  $s(e'') = e'(s)$  で定義すると、 $s \in S(E)$  についてエフェクト空間  $E(S(E))$  の定義から  $0 \leq e'(s) \leq 1$  なので  $0 \leq s(e'') \leq 1$  である。

したがって、 $E(S(E)) \cong E$  である。□

今後、合成系を議論していくが、この双対性が重要な鍵であり、この双対性から合成系の状態空間に定義されていたエンタングルメントの概念を合成系のエフェクト空間に広げることが出来るのである。

## 2.3 古典論

上で定義した一般的な理論の枠組みは、当然古典論を記述出来る。古典論の状態空間は確率分布全体の集合である。標本空間  $\Omega$  を有限集合であるとすると、 $x \in \Omega$  について、 $p_x = p(\{x\})$  は  $(p_0, \dots, p_{n-1})$  と同一視できる。このベクトルで作られる空間は  $p_i \geq 0$  かつ  $\sum_i p_i = 1$  より、幾何学では標準的単体と呼ばれるものである。状態空間はアフィン同型を同一視するから、古典論の状態空間は単体と同一視できる。

次に古典論のエフェクト空間について考える。エフェクトはアフィン汎関数であるが、いま状態空間が一次元大きい空間に埋め込まれていて原点を含んでいないので、エフェクトは線型汎関数である。したがって、Riesz の表現定理から、線型汎関数は内積の形でかける。 $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$  とすると、ゼロエフェクトはすべての成分が 0 のベクトルで、単位エフェクトはすべての成分が 1 のベクトルである。順序については、 $e \leq f$  はすべての成分が大きいこと<sup>14</sup>と同値である。したがって、エフェクト空間は  $0 \leq e_i \leq 1$  を満たす全ての  $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$  のなす集合である。幾何的には古典論のエフェクト空間は  $n$  次元の超立方体である。命題 (エフェクト空間の端点) は超立方体の頂点である。

古典論の特有の性質として、次のことが知られている。

命題 2.12. 有限次元の実ベクトル空間の空でないコンパクトかつ凸な部分集合  $S$  について次は同値である。

- $S$  は古典論、すなわち単体である。
- 任意の状態  $s \in S$  は一意に端点分解できる。
- $S$  の純粋状態を確率 1 で識別する測定が存在する<sup>15</sup>。
- 合成系が一意に定まる<sup>16</sup>。

<sup>14</sup>  $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$  と  $f = (f_0, \dots, f_{n-1})$  とすると、任意の  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  について  $e_i \leq f_i$  が成り立つこと。

<sup>15</sup> すなわち純粋状態  $s_i$  に対して  $A(i)s_j = \delta_{ij}$  が成り立つような物理量  $A$  が存在する。

<sup>16</sup> 合成系については第 3 章で詳しくみる。

- 任意の純粋状態を複製 (clone) するような操作が存在する [6].
- 任意の状態を配送 (broadcast) するような操作が存在する [6].

複製や配送といった操作は、合成系への写像であるため、第3章で議論する合成系を定義しないと定義できない。しかし、いま仮に合成系  $S \otimes S$  が定義できたとすると、複製と配送は次のような写像と定義できる。  $\Lambda_C: S \rightarrow S \otimes S$  が

$$\Lambda_C(s) = s \otimes s$$

を満たすならば、状態変化  $\Lambda_C$  は状態  $s$  を複製するという。任意の状態空間において、混合状態を含めたすべての状態を複製する状態変化は存在しない。これは状態変化のアフィン性から示すことが出来る。また、  $\Lambda_B: S \rightarrow S \otimes S$  が

$$\Lambda_B(s)_A = \Lambda_B(s)_B = s$$

を満たすならば、状態変化  $\Lambda_B$  は状態  $s$  を配送するという。ここで写像  $s \mapsto s_A$  と  $s \mapsto s_B$  は縮約を取る操作である (縮約については 3.2 で定義する)。  $(s \otimes s)_A = (s \otimes s)_B = s$  が成り立つので、複製は配送であるが、逆は成り立たない。すなわち、配送は複製を一般化したものである。

## 2.4 量子論

最初に述べた量子論の公理によって量子論はすでに定まっているが、状態空間やエフェクト空間はこの公理で明示的に扱われていないので、ここでは量子論における状態空間やエフェクト空間とは何かについて述べる。

量子論は状態空間が  $\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \text{tr}[\rho] = 1\}$  で与えられる理論である。  $\mathcal{H}$  は可分複素ヒルベルト空間を表している。  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  はヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上のトレース級作用素の全体の集合である。

最も簡単な量子系は  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$  の場合であり、これで与えられる物理系を量子ビット系やスピン 1/2 の系という。この数学に従う物理は多くあり<sup>17</sup>、構造が単純なためによく研究されている。  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$  は三次元球と (アフィン) 同型である。この球のことを Bloch 球と言う。Bloch 球を図 3 に示す。ブロッホ球は量子状態の正值性  $\rho \geq 0$  から、  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  であり、単位球である。純粋状態  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  は端点なので球の表面の点であり、単位ベクトル  $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$  は図 3 (a) の  $\theta$  と  $\phi$  に対応している。ブロッホ球の球面の各軸と交わる点は特に重要である。この点の具体形については図 (a) の  $\theta$  と  $\phi$  を適切に計算すればよい。  $z$  軸と交わる点の正のほうを  $|0\rangle$ 、負のほうを  $|1\rangle$  とかく。量子コンピュータではこの基底  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  を基準とするので計算基底ということもある。Bloch 球の球殻と  $x$  軸との交点の正のほうを

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$x$  軸との交点の負のほうを

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

<sup>17</sup> 光子の偏光、超伝導量子ビット、二準位原子など。

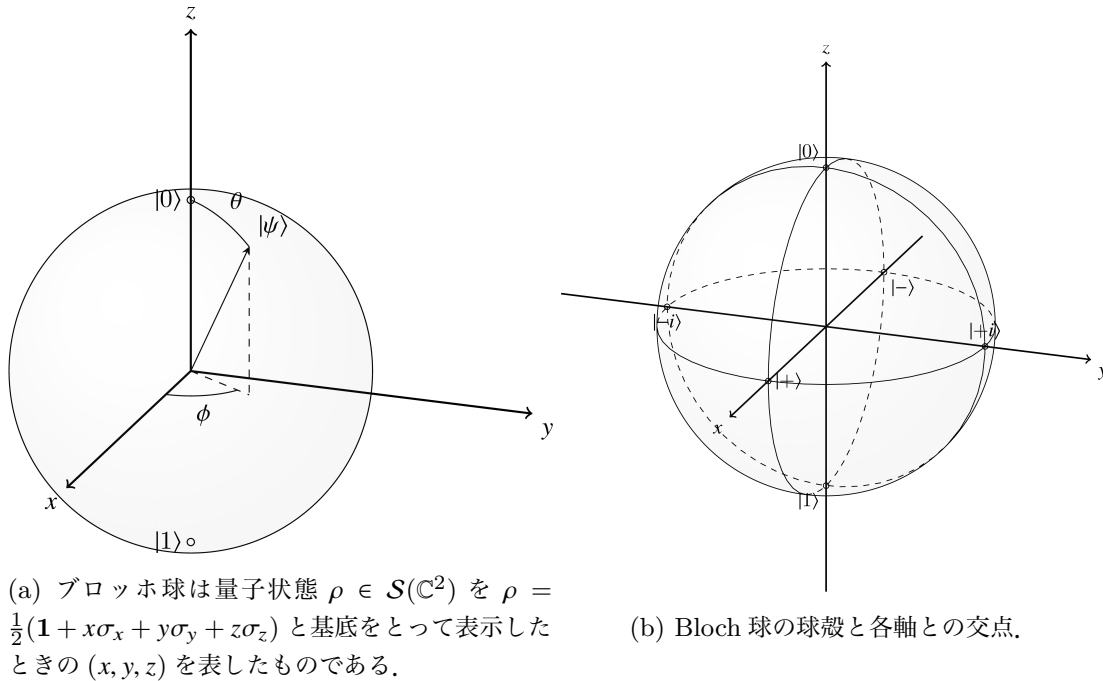


図 3: 量子ビット (二準位系の) 状態空間を表現する Bloch 球

y 軸との交点の正のほうを

$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle),$$

y 軸との交点の負のほうを

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

とかく、Bloch 球の中心、すなわち原点を完全混合状態という。完全混合状態は恒等作用素  $\mathbf{1}$  を用いて、 $\mathbf{1}/2$  である。

次に量子論のエフェクト空間について考える。任意の正作用素  $\rho$  に対して  $\text{tr}[\rho X] \geq 0$  を満たす作用素  $X$  は正作用素である。また、状態はトレースが 1 なので、単位エフェクトとしては恒等作用素  $\mathbf{1}$  が対応する。したがって、エフェクト空間は、

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = E(\mathcal{S}(\mathcal{H})) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq X \leq \mathbf{1}\}$$

である。また、エフェクトの中でも  $P = P^2$  という射影作用素は、エフェクト空間の端点になっているので重要である。言うまでもないが、零作用素  $0$  と恒等作用素  $\mathbf{1}$  も射影作用素である。

量子論におけるエフェクトは正作用素であるから、物理量のことを正作用素値測度 (POVM) という。また、射影作用素上の測度を考えることもあり、これを射影作用素値測度 (PVM) という。自己共役作用素として定義された物理量は、スペクトル定理からこの射影作用素値測度と対応する。

量子論の局所系の状態空間が  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  で与えられるというのは非自明なことであるが、本論文では合

成系に焦点をあてるため、この点には深入りしないことにする<sup>18</sup>。量子ビット系の状態空間が Bloch 球であるということは認めただうえで、その合成系の構造について次の章で議論していく。

---

<sup>18</sup> 量子論の導出については様々な議論がなされている。Chiribella, D'Ariano, Perinotti の 3 人は因果律, 完全識別可能性, 理想的圧縮, 局所識別可能性, 純粋な条件付け (Pure Conditioning) の 5 つの基本の公理とし, 純粋化を公理とすると量子論が導出できることを示した [7]。Dakić と Brukner は情報容量と局所, 連続性を用いて量子論を導出した [8]。Masanes と Müller は有限性, 局所識別性, 部分空間の同値性, 対称性, 任意の測定が許されることを要請した [9]。Wilce は対称性, 最小化, シャープさ, 相関, フィルタリングを公理としている [10]。Hardy は確定性, 情報局所性, 局所識別性, 合成置換性 (compound permutability), 準備性を公理として, 量子論を導き出した [11]。

## 第3章 合成系

この章では、局所系が定義されている状況下で合成系が満たすべき必要条件について議論する。多くの局所系の合成系を議論することも可能であるが、ここでは簡単のために2つの局所系の合成系を議論する。それぞれの系をA系、B系ということにするが、量子情報の慣習にあわせて、アリスの系、ボブの系とそれぞれを呼ぶこともある。

考えたい合成系は、各局所系が時空において空間的である場合である。例えば、[12]の実験のように143km離れた島であっていい。この論文では、左側の島と右側の島でそれぞれ局所系をつくり、二つの島をあわせて合成系とみなしている。

合成系の重要な規則として、

- 瞬間伝送禁止則
- 局所識別性

がある。これらの規則から合成系は最小テンソル積から最大テンソル積の間であることをみることがこの章の目的である。この章の合成系の構成の方法は[13]を参考にした。

### 3.1 合成系の定義

アリスとボブの系の合成系を定義したい。各系は状態空間やエフェクト空間を定めれば決まるので、合成系の状態空間またはエフェクト空間<sup>19</sup>が定めれば、合成系を定めることが出来たと言えるだろう。状態空間  $S_A$  と  $S_B$  の合成系の状態空間を  $S_{AB}$  と書くことにし、それぞれに対応するエフェクト空間を  $E_A = E(S_A)$ ,  $E_B = E(S_B)$ ,  $E_{AB} = E(S_{AB})$  と書く。この状態空間  $S_{AB}$  とエフェクト空間  $E_{AB}$  が満たすべき性質を考える。アリスとボブが各々の系で状態を準備したという状態は合成系の状態であるべきである。

公理 3.1 (積状態の準備). 各々で状態を独立に準備するという  $\otimes: S_A \times S_B \rightarrow S_{AB}$  という操作が存在する。

この写像が全射ではないということは重要である。通常は中置記法を用いて、 $\otimes(s_A, s_B)$  は  $s_A \otimes s_B$  と書かれる。このようにして準備した状態  $s_A \otimes s_B$  を積状態という。この  $\otimes$  の存在は、合成系における積状態の存在を要請しているに他ならない。

アリスが物理量 A, ボブが物理量 B の測定をそれぞれの局所系において行なうことを考える。各局所系における測定は合成系の状態に対して、行なえるべきである (図 4)。

この各々がそれぞれの測定をおこなったという合成系の物理量を  $A \otimes B$  と書くことにしよう。こ

<sup>19</sup> 状態空間またはエフェクト空間を定めれば他方の空間が定まるというのは no-restriction hypothesis[14] という仮説から言えることである。本論文では、状態空間とエフェクト空間の決め方を必要な性質を満たすもの“全体”としているので、自然にこの仮設が入っている。

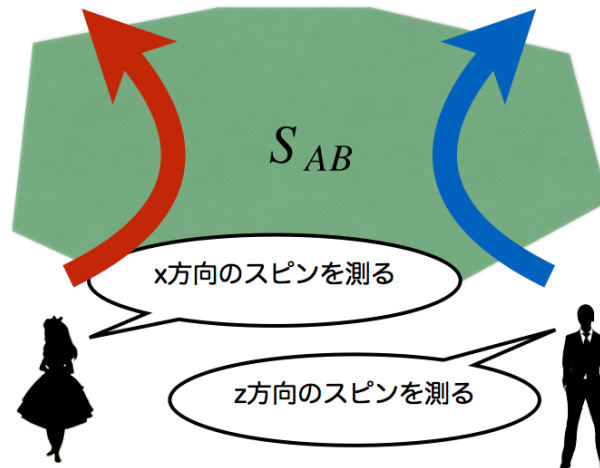


図 4: アリスとボブは局所系における測定を合成系の状態に対しても行なうことができる。ここでは、スピンの測定を行なっていることを想定している。

のようなそれぞれに測定を行なうという操作が合成系に存在することを仮定する。アリスの物理量  $A$  は可測空間  $(\Omega_A, \mathcal{F}_A)$  上のエフェクト値測度である。すなわち、 $A: \mathcal{F}_A \rightarrow E_A$  という写像である。ボブの物理量についても同様である。合成系の物理量  $A \otimes B$  を考えるためには直積可測空間  $(\Omega_A \times \Omega_B, \mathcal{F}_A \otimes \mathcal{F}_B)$  を考える必要がある。合成系の物理量は  $A \otimes B: \mathcal{F}_A \otimes \mathcal{F}_B \rightarrow E_{AB}$  である。 $((A \otimes B)(X \times Y))(s_A \otimes s_B)$  は、アリスが状態  $s_A \in S_A$  を準備し物理量  $A$  を測定したときに事象  $X$  が起こり、同時にボブが状態  $s_B \in S_B$  を準備し物理量  $B$  を測定したときに事象  $Y$  が起こる確率を表している。したがって、次の性質は物理的に成り立って欲しい性質である。

公理 3.2 (積状態の積測定). 任意の状態  $s_A \in S_A$ ,  $s_B \in S_B$ , アリスの物理量  $A$  とボブの物理量  $B$ , 測定結果  $X \in \mathcal{F}_A$ ,  $Y \in \mathcal{F}_B$  に対して,

$$((A \otimes B)(X \times Y))(s_A \otimes s_B) = (A(X))(s_A)(B(Y))(s_B) \quad (1)$$

が成り立つ。

式 (1) が合成系に要請する性質である。全事象が起こる確率を計算すると、 $u_A$  と  $u_B$  をそれぞれの局所系における単位エフェクトとして、

$$((A \otimes B)(\Omega_A \times \Omega_B))(s_A \otimes s_B) = A(\Omega_A)(s_A)B(\Omega_B)(s_B) = u_A(s_A)u_B(s_B) = 1$$

であり、全確率は 1 となっている。

合成系の状態空間  $S_{AB}$  とエフェクト空間  $E_{AB}$  がどういう集合かは一意に定まっていない。積状態  $s_A \otimes s_B$  の形に分解できないような状態もある。ここから、さらに物理的な性質を仮定して選択肢を絞っていく。



### 3.2 瞬間伝送禁止則

まず、瞬間伝送禁止則 (No-Signaling rule) について述べる。瞬間伝送禁止則は、空間的に離れたアリスとボブの操作がお互いに瞬時に伝わらないというものである。例えば、アリスが自身の局所系に対して測定を行なうとして、どういった測定を行なったかがボブ側に伝わってしまってはならないというのが瞬間伝送禁止則である (図 5)。

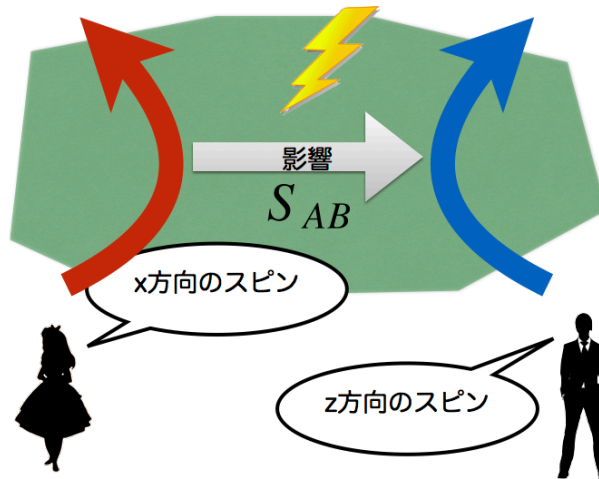


図 5: 瞬間伝送禁止則はアリスがどの測定 (スピンの測定の場合どの方向のスピンの測定) を行なっても、あるいは測定操作を行なっていない場合、ボブの測定結果が変わらないというものである。同様にボブの測定の影響もアリス側には及ばない。

公理 3.3 (瞬間伝送禁止則). 任意の合成系の状態  $s \in S_{AB}$  に対して、アリスの測定結果はボブが選択した物理量に依らない。すなわち、

$$((A \otimes B)(X \times \Omega_B))(s) = ((A \otimes B')(X \times \Omega_B))(s)$$

が成り立つ。同様に、ボブの測定結果はアリスの選択した物理量に依らない。すなわち、

$$((A \otimes B)(\Omega_A \times Y))(s) = ((A' \otimes B)(\Omega_A \times Y))(s)$$

が成り立つ。

瞬間伝送禁止則が成り立つと、縮約状態 (reduced state)<sup>20</sup>が定義できる。  $s \in J(S_{AB})$  を合成系の状態として<sup>21</sup>、任意の物理量  $A$  と事象  $X \in \mathcal{F}_A$  に対して、

$$s_A(A(X)) = s((A \otimes B)(X \times \Omega_B))$$

<sup>20</sup> あるいは周辺状態 (marginal state) ということもある。通常の確率論でいう周辺確率と似ており、実際に古典論の場合は周辺状態は周辺確率と同じである。

<sup>21</sup> 第 2 章で導入したアフィン同型写像  $J: S \rightarrow S^{**}$  を用いた。これには 2 つ理由がある。1 つ目の理由は見やすいからで、2 つ目の理由はあとで合成系の状態空間の双線型性についてみるからである。

を満たす状態  $s_A$  を縮約状態と言うが、瞬間伝送禁止則が成り立てばこの縮約状態が  $B$  のとり方に依らなくなるので、well-defined となる。  $s_A$  は局所系の状態、すなわち、  $s_A \in J(S_A)$  である。同様に、  $s_B$  は

$$s_B(B(Y)) = s((A \otimes B)(\Omega_A \times Y))$$

と定義される。  $s_B$  は局所系の状態、すなわち、  $s_B \in J(S_B)$  である。この  $s \mapsto s_A, s \mapsto s_B$  という操作は、量子論では部分トレースである。部分トレースとは、任意の  $X$  について  $\text{tr}[\text{tr}_A[\rho]X] = \text{tr}[\rho \mathbf{1} \otimes X]$ ,  $\text{tr}[\text{tr}_B[\rho]X] = \text{tr}[\rho X \otimes \mathbf{1}]$  が成り立つ写像  $\text{tr}_A: \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  と  $\text{tr}_B: \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_A)$  であるから、部分トレースをとったあとの状態は先の縮約状態と同じである。

つぎに条件付き状態を定義する。これは通常確率論でいう条件付き確率である。合成系の状態  $s$  を準備しボブが物理量  $B$  を測定したとき  $Y$  が起こったときの条件付き状態  $s_{A|B(Y)}$  を次のように定義する。任意の  $A(X)$  に対して、

$$s_{A|B(Y)}(A(X)) := \frac{s((A \otimes B)(X \times Y))}{s_B(B(Y))} = \frac{s((A \otimes B)(X \times Y))}{s((A \otimes B)(\Omega_A \times Y))}$$

を満たす  $s_{A|B(Y)}$  である。同様にして、合成系の状態  $s$  を準備しアリスが物理量  $A$  を測定したとき  $X$  が起こったときの条件付き状態  $s_{B|A(X)}$  を

$$s_{B|A(X)}(B(Y)) := \frac{s((A \otimes B)(X \times Y))}{s_A(A(X))} = \frac{s((A \otimes B)(X \times Y))}{s((A \otimes B)(X \times \Omega_B))}$$

と定義する。これらの状態はそれぞれの局所系の状態である。すなわち、  $s_{A|B(Y)} \in J(S_A)$ ,  $s_{B|A(X)} \in J(S_B)$  が成り立つ。

命題 3.4 (Wilce[15]). 合成系で瞬間伝送禁止則が成り立つとする。このとき、任意の状態  $s \in J(S_{AB})$  は  $S_A^* \times S_B^*$  の双線型形式に一意に拡大できる。

証明. 任意の  $A(X) \in E_A$  と  $s \in J(S_{AB})$  に対して、  $\hat{s}(A(X)): E_B \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\hat{s}(A(X))(B(Y)) := s(A \otimes B(X \times Y))$  と定義する。このとき、  $s_{B|A(X)} = \frac{\hat{s}(A(X))}{s_A(A(X))} \in J(S_B) \subset S_B^{**}$  であるから、  $\hat{s}$  は、  $\hat{s}(u) = s_B$  をみたす  $\hat{s}(A(X)) \in S_B^{**}$  である。

$\hat{s}$  の双対  $\hat{s}^*: S_B^* \rightarrow \mathbb{R}^{E_A}$  は、  $\hat{s}^*(B(Y)) = s_B(B(Y))s_{A|B(Y)}$  である。  $s_{A|B(Y)} \in J(S_A) \subset S_A^{**}$  なので、任意の  $B(Y) \in E_B$  について  $\hat{s}^*(B(Y)) \in S_A^*$  である。  $E_B$  が  $S_B^*$  を生成するので、  $\hat{s}^*: S_B^* \rightarrow S_A^{**}$  とみなすことが出来る。双線型形式  $B_s: S_A^* \times S_B^* \rightarrow \mathbb{R}$  を  $B_s(A(X), B(Y)) = \hat{s}^*(B(Y))(A(X))$  と定義すると、任意の  $A(X) \in E_A$  と  $B(Y) \in E_B$  に対して  $B_s(A(X), B(Y)) = B_s(A \otimes B(X \times Y))$  を満たすので、これが望む拡大である。一意性は  $E_A$  と  $E_B$  がそれぞれ  $S_A^*$  と  $S_B^*$  を生成することから、従う。  $\square$

$s((A \otimes B)(X \times Y)) = B_s(A(X), B(Y))$  が成り立つことから、  $s((A \otimes B)(X \times Y)) = s(A(X) \otimes B(Y))$  が成り立つような、  $\otimes: S_A^* \times S_B^* \rightarrow S_{AB}^*$  が定義できる。これを用いると、  $A \otimes B(X \times Y) = A(X) \otimes B(Y)$  であることがわかる。

### 3.3 局所識別性

瞬間伝送禁止則に加えて合成系にもう一つ自然な仮定を入れる。それは、アリスとボブの合成系の状態は各々の局所系における測定  $A \otimes B$  によって識別できるという局所識別性という性質である (図 6)。すなわち、任意の物理量  $A, B$  と事象  $X, Y$  に対して  $s(A \otimes B(X \times Y)) = s'(A \otimes B(X \times Y))$  が成り立つならば、 $s = s'$  が成り立つということである。この局所識別性は、それぞれの測定結果の同時確率分布から状態が一意に決まるというものであり、縮約状態  $s_A$  と  $s_B$  から一意に合成系の状態  $s$  が定まるというものではない。瞬間伝送禁止則を仮定すると、 $A \otimes B(X \times Y) = A(X) \otimes B(Y)$  と分解

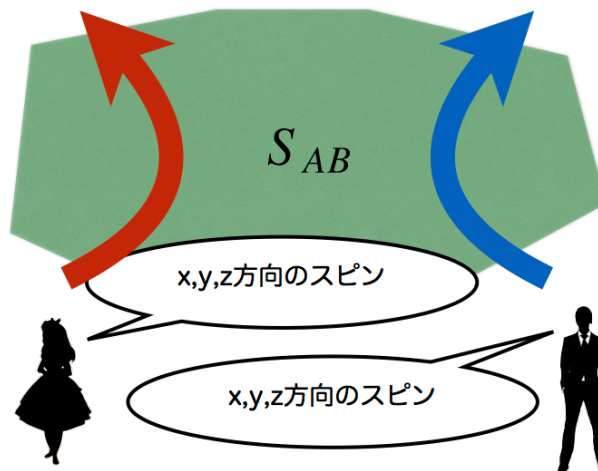


図 6: 局所識別性のスピン 1/2 の粒子の合成系の例。局所識別性とはアリスとボブがそれぞれ  $x, y, z$  方向の測定を行ない、その測定結果を合わせると状態が一意に定まるという性質である。

できるので、局所識別性は任意のエフェクト  $e_A \in E_A, e_B \in E_B$  について  $s(e_A \otimes e_B) = s'(e_A \otimes e_B)$  が成り立つならば、 $s = s'$  が成り立つことと同値である。したがって、 $S_{AB}^* \simeq S_A^* \otimes S_B^*$  である<sup>22</sup>。いま空間の次元は有限と仮定しているので、 $\dim(S_{AB}^*) = \dim(S_A^*) \dim(S_B^*)$  である。

<sup>22</sup>  $S^*$  は実線型空間であるから、このテンソル積は (有限次元) ベクトル空間に定義された通常のテンソル積である。ベクトル空間のテンソル積は様々な定義の方法があるが、その 1 つとして次のような定義が考えられる。ベクトル空間  $V_A, V_B$  に対して、双線型写像  $\otimes$  で生成されるベクトル空間  $V_A \otimes V_B$  で、任意のベクトル空間  $W$  と双線型写像  $f: V_A \otimes V_B \rightarrow W$  に対して、図式

$$\begin{array}{ccc}
 V_A \times V_B & \xrightarrow{\otimes} & V_A \otimes V_B \\
 & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\
 & & W
 \end{array}$$

を可換にする  $\tilde{f}$  が存在するような  $V_A \otimes V_B$  をテンソル積ベクトル空間という。テンソル積ベクトル空間はベクトル空間としての同型を除いて一意に存在する。この  $V_A \otimes V_B$  がベクトル空間のテンソル積である。この他にも基底を用いた定義や直積空間の同値類として定義するものがある。

### 3.4 最小テンソル積と最大テンソル積

合成系として満たすべき性質をみてきた。状態空間は空でないコンパクト凸集合であるが、コンパクト凸集合のテンソル積には最小のものと最大のものがあることが知られている [16].

最小テンソル積状態空間は、コンパクト凸集合  $J(S_A)$  と  $J(S_B)$  に対して、純粋テンソル (pure tensor)  $s_A \otimes s_B$  の凸包である。最小テンソル積状態空間を  $J(S_A) \otimes_{\min} J(S_B)$  と書くとする、 $J(S_A) \otimes_{\min} J(S_B) = \{ \sum_i^n p_i s_A^i \otimes s_B^i \mid s_A^i \in J(S_A), s_B^i \in J(S_B), p_i \geq 0, \sum_i^n p_i = 1, n \in \mathbb{N} \}$  である。

エフェクト空間の最小のテンソル積も似たように定義できる。すなわち、純粋テンソル (pure tensor)  $e_A \otimes e_B$  で生成される最小のエフェクト空間である。エフェクト空間を定めるためにはゼロエフェクト  $0$ 、単位エフェクト  $u$ 、ベクトル順序  $\leq$  が分かればよい。合成系のゼロエフェクトと単位エフェクトはそれぞれ  $0_A \otimes 0_B$  と  $u_A \otimes u_B$  である。次に、純粋テンソルで生成される最小のベクトル順序を考える。ベクトル順序は  $e_A \otimes e_B \geq 0$  ならば、非負の実数  $\lambda$  に対して  $\lambda e_A \otimes e_B \geq 0$  である。また、 $e_A^1 \otimes e_B^1 \geq 0$  かつ  $e_A^2 \otimes e_B^2 \geq 0$  ならば  $e_A^1 \otimes e_B^1 + e_A^2 \otimes e_B^2 \geq 0$  である。すなわち、非負の定数倍と加法演算について閉じている。これを繰り返し用いることで、非負の実数を用いて  $\lambda_i$  を用いて  $\sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i$  と分解できる元は正である。したがって、合成系において  $e \leq f$  であるとは、 $f - e$  が正であること、すなわち、 $f - e = \sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形で書けることである。これはベクトル順序が満たす性質のみから作ったので、純粋テンソルによって生成される最小のベクトル順序である。このようにしてベクトル順序が定義できたので最小テンソル積エフェクト空間が定義できる。最小テンソル積エフェクト空間は  $[0, u] = \{ e \mid 0_A \otimes 0_B \leq e \leq u_A \otimes u_B \}$  である。エフェクト空間  $E_A$  と  $E_B$  の最小テンソル積エフェクト空間を  $E_A \otimes_{\min} E_B$  と書く。

最大テンソル積状態空間  $J(S_A) \otimes_{\max} J(S_B)$  は最小エフェクト空間の双対空間である。すなわち、 $s$  は  $u_A \otimes u_B$ 、 $s(u_A \otimes u_B) = 1$  を満たし、任意のエフェクト  $e \in E_A \otimes_{\min} E_B$  に対して  $s(e) \geq 0$  を満たすアフィン写像からなる空間を最大テンソル積状態空間という。すなわち、 $J(S_A) \otimes_{\max} J(S_B) = S(E_A \otimes_{\min} E_B) = \{ s \in (S_A^* \otimes S_B^*)^* \mid s(u_A \otimes u_B) = 1 \text{ and } s(e) \geq 0, e \in E_A \otimes_{\min} E_B \}$  である。

同様に最大テンソル積エフェクト空間は  $E_A \otimes_{\max} E_B = E(S_A \otimes_{\min} S_B)$  である。

瞬間伝送禁止則と局所識別を満たす合成系の状態空間  $S_{AB}$  は以下の関係を満たしている。

$$S_A \otimes_{\min} S_B \subseteq S_{AB} \subseteq S_A \otimes_{\max} S_B. \quad (2)$$

すなわち、最小テンソル積状態空間と最大テンソル積状態空間の間にある。  $S_{AB}$  について積状態の存在は仮定しているので、  $S_{AB}$  は積状態から生成される最小のテンソル積よりは大きいから  $S_A \otimes_{\min} S_B \subset S_{AB}$  である。任意の状態  $s \in S_{AB}$  は  $S_A^* \times S_B^*$  の正の双線型形式に一意に拡大できるので、  $J(S_{AB}) \rightarrow S_A \otimes_{\max} S_B$  の正写像がある。

最小テンソル積空間  $S_A \otimes_{\min} S_B$  と最大テンソル積空間  $S_A \otimes_{\max} S_B$  が一致するならば、合成系が一意に定まる。実は、少なくとも片方の系が古典であるときは  $S_A \otimes_{\min} S_B = S_A \otimes_{\max} S_B$  が成り立つことが知られている [16]。さらに、両方の系が古典ではない場合は  $S_A \otimes_{\min} S_B \subsetneq S_A \otimes_{\max} S_B$  である

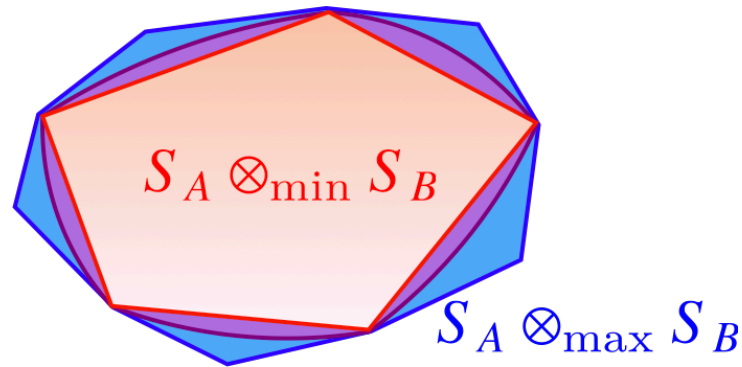


図 7: 各合成系の状態空間の包含関係: 実際の合成系の状態空間は二次元ではないが, 紙面の都合により二次元上に書いた. 赤色が最小テンソル積状態空間で, 青色が最大テンソル積状態空間を表している. 合成系の状態空間はこの間ならばどこでもよく, 例えば紫色のような状態空間が考えられる. 最小テンソル積状態空間の端点は他の合成系の状態空間の端点である [16].

[16] ので, 量子論の合成系は一意には定まっていない.

量子論の合成系の公理曰く, 「合成系はヒルベルト空間のテンソル積」である. この方法で決めた状態空間  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  は, 最小テンソル積状態空間でも最大テンソル積状態空間でもない. すなわち,

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B) \subsetneq \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \subsetneq \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$$

である. 本論文の目的はこの量子論の合成系の公理を検証するということであるから, 量子論の合成系の状態空間が最小テンソル積状態空間と最大テンソル積状態空間のどちらでもないことを物理原理から確認しなければならない.

## 第4章 エンタングルメント

### 4.1 状態のエンタングルメント

合成系の量子状態にはエンタングルメントという性質がある。操作論的には LOCC (Local Operations and Classical Communication) という局所操作と古典通信のみを用いて作ることができない状態のことをエンタングルした状態 (Entangled state) という。逆に、二者間でエンタングルメントを作るためには、量子ビットなどの量子状態のやり取りや非局所な操作が不可欠であるということが示唆されている。

数学的にはエンタングルメントは次のように定義される。

定義 4.1. 量子状態  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  が

- $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$  の形に分解できるとき、 $\rho$  を積状態という。
- $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$  の形に分解できるとき、 $\rho$  をセパラブル状態という。ここで  $p_i$  は  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$  を満たす実数の組である。
- セパラブル状態ではない状態をエンタングルした状態という。

この定義をコンパクト凸集合のテンソル積の言葉を用いて言い換えると、 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  の状態がセパラブル状態で、 $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \setminus \mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  である状態がエンタングルした状態である。

エンタングルした状態の例としては、量子情報において重要な Bell 状態がある。次の4つの状態が Bell 状態である。

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle).$$

これは  $\mathbb{C}^4$  の正規直交基底にもなっているので、Bell 基底とも言われる。密度行列の形で Bell 状態を書くと、

$$|\Phi^\pm\rangle\langle\Phi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi^\pm\rangle\langle\Psi^\pm| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。

Bell 状態は二体の相互作用があれば準備することが出来る。特に、量子計算ではアダマールゲート

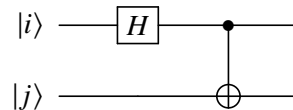
と CNOT ゲートを用いて, Bell 状態を準備することが出来る. アダマールゲートとは

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と表される一体のユニタリ時間発展で, CNOT ゲートとは

$$\text{CNOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で表される二体のユニタリ時間発展である. CNOT ゲートの情報的な意味は, 1つ目のビットが0のときは何もしないで, 1つ目のビットが1のときは2つ目のビットを反転するというものである. こういった性質から, 1つ目のビットをコントロールビット, 2つ目のビットをターゲットビットという. このアダマールゲートと CNOT ゲートを用いて, ベル状態は次のようにして作ることが出来る.



このように量子状態の操作を書いた図を量子回路図 (Quantum Circuit Diagrams) と言う. 量子回路図は左から右に時間が流れていく. この量子回路図は, まず上の量子ビットにアダマールゲートを作用させ, 次に両方のビットに CNOT ゲートを作用させることを意味している. ● はコントロールビットを表し, ⊕ はターゲットビットを表す. この量子回路を用いて状態を変化させると, 入力状態が  $|i\rangle = |j\rangle = |0\rangle$  のとき  $|\Phi^+\rangle$  になり,  $|i\rangle = |1\rangle, |j\rangle = |0\rangle$  のとき  $|\Phi^-\rangle$  になり,  $|i\rangle = |0\rangle, |j\rangle = |1\rangle$  のとき  $|\Psi^+\rangle$  になり,  $|i\rangle = |j\rangle = |1\rangle$  のとき  $|\Psi^-\rangle$  になる.

## 4.2 エンタングルメント・ウィットネス

与えられた状態がエンタングルしているかどうかを判定するという問題を考える. 状態がエンタングルしているかどうか判定する手法は PPT(positive partial transpose)[17, 18] や縮約判定法 [19, 20] など色々あるが, その1つがエンタングルメント・ウィットネス (Entanglement witnesses)[18] を用いた方法である. エンタングルメント・ウィットネスは次のような物理量である.

**定義 4.2 (エンタングルメント・ウィットネス).** エンタングルメント・ウィットネスとは, 正でない自己共役作用素で, 任意の純粋状態のテンソル積 (*pure tensor*)  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  に対して,  $\langle \psi \otimes \phi | W | \psi \otimes \phi \rangle \geq 0$  なる作用素  $W$  である.

この任意の純粋テンソル積 (*pure tensor*)  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  について,  $\langle \psi \otimes \phi | W | \psi \otimes \phi \rangle \geq 0$  がなりたつという  $W$  の性質を POPT(positive on pure tensor) という. エンタングルメント・ウィットネスを用いるとエンタングルした状態とセパラブル状態を識別することが出来る. セパラブル状態については次の性質が成り立つ.

命題 4.3. 任意のエンタングルメント・ウィットネス  $W$  に対して, 状態  $\rho_S$  がセパラブルならば  $\text{tr}[\rho_S W] \geq 0$  が成り立つ.

証明. まず積状態  $\rho_A \otimes \rho_B$  について証明を行なう. 任意の状態は純粋状態の確率混合で準備することができるので,  $\rho_A \otimes \rho_B = \left(\sum_j p_A^j |j\rangle\langle j|\right) \otimes \left(\sum_k p_B^k |k\rangle\langle k|\right)$  と分解することが出来る. したがって,

$$\begin{aligned} \text{tr}[\rho_A \otimes \rho_B W] &= \text{tr} \left[ \left( \sum_j p_A^j |j\rangle\langle j| \right) \otimes \left( \sum_k p_B^k |k\rangle\langle k| \right) W \right] \\ &= \sum_{j,k} p_A^j p_B^k \langle j \otimes k | W | j \otimes k \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である. セパラブル状態は積状態の確率混合であるので,  $\text{tr}[\rho_S W] \geq 0$  が成り立つ. □

エンタングルした状態に対しては  $\text{tr}[\rho W]$  は正になるとは限らない.  $W$  という物理量の測定を行なって, その平均値  $\text{tr}[\rho W]$  が負ならば,  $W$  を用いて  $\rho$  のエンタングルメントを検出したという. エンタングルメント・ウィットネスは 0 以上か 0 未満かでエンタングルしているかどうかを判定しているが, 物理量は定数ずらしても本質は変わらないので, この 0 という値は重要ではない.

実は命題 4.3 は逆が成り立つ.

命題 4.4. 任意のエンタングルした状態  $\rho_E$  に対して  $\text{tr}[\rho_E W] < 0$  となるような, エンタングルメント・ウィットネス  $W$  が存在する.

証明. セパラブル状態全体の集合  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  はコンパクト凸集合である. 一点集合はコンパクトなので, あるエンタングルした状態  $\rho_E$  のみからなる集合とセパラブル状態全体の集合について, Hahn-Banach の分離定理 (補題 2.10) が応用でき, 任意のセパラブル状態  $\rho_S$  に対して,

$$f(\rho_E) < \lambda < f(\rho_S)$$

なる連続線型汎関数  $f$  が存在する. 自己共役なトレースクラス作用素全体の集合は実ヒルベルト空間なので Riesz の表現定理を用いると, この  $f$  に対応して,  $f(\rho) = \text{tr}[\rho F]$  なる作用素  $F$  が存在することが分かる.  $W = F - \lambda \mathbf{1}$  と定義すれば, この作用素  $W$  は  $\text{tr}[\rho_E W] < 0$  を満たすエンタングルメント・ウィットネスとなっている. □

エンタングルメント・ウィットネスを用いるとエンタングルした状態を検出できることがわかった. 実はエンタングルメント・ウィットネスは先に見たコンパクト凸集合の最大テンソル積と関係ある. このことを次でみていく.

### 4.3 非正 POPT 状態

POPT(positive on pure tensor) でトレースが 1 のものを POPT 状態 (Positive On Pure Tensor) という [21]. 正でない POPT 状態を非正 POPT 状態という. 非正 POPT 状態は定義から分かるよ



うに、エンタングルメント・ウィットネスの条件にトレースが1という条件が付け加わったものである。

実は、この POPT 状態の集合とコンパクト凸集合の最大テンソル積状態空間は一致する。

定理 4.5. POPT 状態全体の集合は  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  と一致する。

証明. いま、 $s$  を最大テンソル積状態とすると、 $s(u_A \otimes u_B) = 1$ 、かつ任意の  $\lambda_i \geq 0$ 、 $e_A \geq 0$ 、 $e_B \geq 0$  に対して  $s(\sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i) \geq 0$  を満たす。 $s$  に対応する行列を  $\rho^s$  とすると、最初の条件から  $\text{tr}[\rho^s \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] = \text{tr}[\rho^s] = 1$  である。すなわち、 $\rho^s$  はトレースが1である。二つ目の条件から、任意の1次元射影  $|\psi\rangle\langle\psi|$ 、 $|\phi\rangle\langle\phi|$  は正であるから、 $0 \leq \text{tr}[\rho^s |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi|] = \langle\psi \otimes \phi | \rho^s \psi \otimes \phi\rangle$  である。すなわち、 $\rho^s$  は任意の純粋状態の積状態について正であるから、POPT 状態である。

逆に、 $\text{tr}[\rho] = 1$  かつ  $\langle\psi \otimes \phi | \rho \psi \otimes \phi\rangle \geq 0$  なる行列  $\rho$  を考える。 $s^\rho(e) = \text{tr}[\rho e]$  と定義すると、トレースが1から  $1 = \text{tr}[\rho] = \text{tr}[\rho \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] = \text{tr}[\rho u_A \otimes u_B] = s^\rho(u_A \otimes u_B)$  である。また、任意の正作用素  $e \geq 0$  は  $\lambda_i \geq 0$  を用いて  $\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$  と分解できるので、 $s^\rho(\sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i) = \sum_i \lambda_i s^\rho((\sum_j \lambda_j^A |j\rangle\langle j|) \otimes (\sum_k \lambda_k^B |k\rangle\langle k|)) = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j^A \lambda_k^B \langle j \otimes k | \rho j \otimes k\rangle \geq 0$  となるので、最大テンソル積状態である。□

非正 POPT 状態の例を述べる。行列

$$\rho = \frac{1}{4}\sigma_x \otimes \sigma_x + \frac{1}{4}\sigma_z \otimes \sigma_z + \frac{1}{4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

についてみる。まず、この行列はトレースが1である。次に固有値を調べると、

$$-\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}$$

の4つである。負の固有値があるので正作用素ではない。純粋テンソル  $|\psi \otimes \phi\rangle$  で挟むと、

$$\langle\psi \otimes \phi | \rho \psi \otimes \phi\rangle = \frac{1}{4} (\langle\psi | \sigma_x \psi\rangle \langle\phi | \sigma_x \phi\rangle + \langle\psi | \sigma_z \psi\rangle \langle\phi | \sigma_z \phi\rangle) + \frac{1}{4} \quad (4)$$

である。ここで、任意の状態

$$\rho_1 = \frac{1}{2} + x_1 \frac{\sigma_x}{2} + y_1 \frac{\sigma_y}{2} + z_1 \frac{\sigma_z}{2}, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} + x_2 \frac{\sigma_x}{2} + y_2 \frac{\sigma_y}{2} + z_2 \frac{\sigma_z}{2}$$

に対して<sup>23</sup>、不等式

$$\begin{aligned} |\text{tr}[\rho_1 \sigma_x] \text{tr}[\rho_2 \sigma_x] + \text{tr}[\rho_1 \sigma_z] \text{tr}[\rho_2 \sigma_z]| &= |x_1 x_2 + z_1 z_2| \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + z_2^2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

<sup>23</sup> 第2章で述べたが、 $\rho_1, \rho_2$  が状態である条件は  $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \leq 1$  が成り立つことであった。

が成り立つ. この不等式を用いて, 式 (4) を評価すると,

$$\langle \psi \otimes \phi | \rho \psi \otimes \phi \rangle \geq 0$$

である. したがって, この行列  $\rho$  は非正 POPT 状態になっている.

通常の状態空間の端点はランクが 1 の射影演算子というよく知られた特徴付けがある. しかし, POPT 状態の集合の端点を特徴づける方法は明らかではない. また, 与えられた POPT 状態が POPT 状態全体の集合の端点であるかを判定する手法は明らかではない.

ここで, 状態空間の各テンソル積と今までみてきたセパラブル状態の集合や非正 POPT 状態との関係をまとめる (図 1).

$S(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} S(\mathcal{H}_B)$	$S(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$	$S(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} S(\mathcal{H}_B)$
セパラブル状態全体の集合	量子論の状態空間	POPT 状態の状態空間

表 1: 状態空間の各テンソル積とその関係

次の章では状態空間の双対空間である, 物理量を形作るエフェクト空間の性質を調べる. 特に, 状態に定義されていたエンタングルメントを物理量についても定義することを試みる.

#### 4.4 物理量のエンタングルメント

ここでは, 物理量のエンタングルメントを定義し, その性質を調べる. 物理量はエフェクト上の測度から作られるので, まず最初に, エフェクトについてエンタングルメントを定義する. 量子論でエフェクトとは  $0 \leq e \leq \mathbf{1}$  を満たす作用素  $e$  である.

状態のエンタングルメントの類推から, エフェクト  $e \in \mathcal{E}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  が  $e = \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  ( $p_i \geq 0, \sum p_i = 1$ ) の形に分解できるときエフェクト  $e$  はセパラブル, このような分解が出来ないときエフェクトはエンタングルしていると定義することは自然である. しかし, この定義は良くない. なぜならば, この定義だと古典論においてもエンタングルメントが生じてしまうからである. 古典の 2 状態の系で考える. 標本空間  $\Omega_A = \{0, 1\}$  上の確率空間  $P(\Omega_A)$  は, 0 が出る確率を  $p(0)$ , 1 が出る確率を  $p(1)$  とすると,  $P(\Omega_A) = (p(0), p(1))$  と同一視することが出来る.  $P(\Omega_B)$  についても同様である. 直積確率空間  $P(\Omega_A \times \Omega_B)$  が合成系の状態空間である.  $\Omega_A \times \Omega_B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  を略記して  $\Omega_A \times \Omega_B = \{00, 01, 10, 11\}$  と書くことにする.  $\Omega_A \times \Omega_B$  上の確率空間  $P(\Omega_A \times \Omega_B)$  は  $P(\Omega_A)$  や  $P(\Omega_B)$  と同様に  $(p(00), p(01), p(10), p(11))$  と同一視できる. 古典確率のエフェクト空間は  $e: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  なるアフィン写像のなす空間であるから, 標準的な内積を用いて,  $e = (e(00), e(01), e(10), e(11))$  と同一視することが出来る. このとき,  $e(ij)$  は  $e(ij) \in [0, 1]$  を満たす実数である. この状況でセパラブルエフェクト, エンタングルしたエフェクトについて考えてみる. 例えば,  $(1, 0, 0, 0)$  は  $(1, 0) \otimes (1, 0)$  なので, 先の暫定的な定義でセパラブルエフェクト<sup>24</sup>である. 次に  $(0, 1, 1, 1)$  はエフェクトではあるが,  $e = \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解すること

<sup>24</sup> あるいは  $e = e_A \otimes e_B$  と書けるエフェクトを積エフェクトと定義し, エフェクト  $(1, 0, 0, 0)$  を積エフェクトと言って

は出来ない. なぜならば,  $(0, 1, 1, 1)$  はエフェクト空間の端点であるので, もし  $(0, 1, 1, 1)$  が分解できるならば積の形に限られ,

$$(0, 1, 1, 1) = (e_A(0), e_A(1)) \otimes (e_B(0), e_B(1)) = (e_A(0)e_B(0), e_A(0)e_B(1), e_A(1)e_B(0), e_A(1)e_B(1))$$

である. これは第一成分が0なので,  $e_A(0)$  または  $e_B(0)$  が0であるが, このとき第二成分または第三成分が0になるので, 左辺の1と矛盾している. したがって, 先の定義では古典論においてもエンタングルメントがあるという結論が得られるのでこの定義は満足がいくものではない.

次に,  $e$  がエフェクトならば  $u - e$  もエフェクトである<sup>25</sup> ことに着目して, 先の定義に加えて  $e = u - \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解出来るものもセパラブルであるという定義を考えた. この定義ならば先の例ではセパラブルでなかった  $(0, 1, 1, 1)$  も

$$(0, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1) - (1, 0) \otimes (1, 0)$$

と分解できるのでセパラブルになる. しかし, この定義でも, 古典論にエンタングルメントがあることになってしまう. 例えば, エフェクト  $(1, 0, 0, 1)$  はこの定義のもとでもセパラブルではない. なぜならば, 先の議論と同様にして,

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 1) &= (e_A(0), e_A(1)) \otimes (e_B(0), e_B(1)) \\ (1, 0, 0, 1) &= (1, 1, 1, 1) - (e_A(0), e_A(1)) \otimes (e_B(0), e_B(1)) \end{aligned}$$

のいずれかの式を満たす, エフェクト  $e_A$  とエフェクト  $e_B$  は存在しないからである.

エフェクト空間にエンタングルメントを定義するのは難しい. その理由は確率測度の完全加法性にある<sup>26</sup>. エフェクト値測度も同様の加法性があるので, エフェクト  $e$  と  $e'$  について和  $e + e'$  もまたエフェクトになることがあるのである. これが, 状態にはないエフェクトの性質であり, エフェクトのエンタングルメントの定義を難しくしている原因である. エフェクトのエンタングルメントとして妥当な定義はどういったものであろうか. エフェクトの定義である  $0 \leq e \leq u$  に立ち返ってみると, 重要なのはこの  $\leq$  という順序構造の決め方にある<sup>27</sup>. これらの性質に着目すると次のような定義が考えられる.

定義 4.6 (エフェクトのエンタングルメント). エフェクト  $e$  が

$$e = \sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i$$

の形に分解でき, かつ

$$e = u - \sum_i \lambda'_i e_A'^i \otimes e_B'^i$$

もよい.

<sup>25</sup>  $u$  は順序単位, あるいはユニットエフェクトと呼ばれるもので, 量子論では恒等作用素  $\mathbf{1}$  が  $u$  である.

<sup>26</sup> 完全加法性とは互いに素な  $X_i$  について,  $p(\cup_{i=0}^{\infty} X_i) = \sum_{i=0}^{\infty} p(X_i)$  を満たすという性質である.

<sup>27</sup> 量子論では作用素  $A, B$  が  $A \leq B$  であることを,  $B - A$  が正作用素であると定義していた.

の形に分解できるとき、エフェクト  $e$  はセパラブルであると定義する。ただし、ここで  $\lambda_i$  と  $\lambda'_i$  は非負の実数であるとする<sup>28</sup>。

セパラブルでないエフェクトをエンタングルしたエフェクトと定義する。

この定義が古典論でうまくいっていることを確認する。すなわち、古典論ではエンタングルメントは存在してほしくないので、任意のエフェクトはセパラブルであることを示せば良い。

定理 4.7. 古典論では任意のエフェクトはセパラブルである。

証明.  $n$  状態の古典系と  $m$  状態の古典系の合成系を考える。直積確率空間の議論から、 $n$  状態の古典系と  $m$  状態の古典系の合成系は  $n \times m$  状態の古典系である。 $n$  状態ある古典系のエフェクト空間は  $(e(0), \dots, e(n-1))$  と書ける。このとき、 $e(i)$  は  $0 \leq e(i) \leq 1$  を満たす実数である。全部の成分が 0 のエフェクトをゼロエフェクトと言い、全部の成分が 1 のエフェクトを単位エフェクトという。さらに特別なエフェクトとして、エフェクトのある 1 つの成分のみが 1 で残りの成分が 0 という純粋エフェクトがある。各系の純粋エフェクト同士のテンソル積を考えると、合成系の純粋エフェクトを作ることが出来る。 $n \times m$  状態の古典系のエフェクト空間の任意の元  $(e(0), \dots, e(n \times m - 1))$  がセパラブルであることを示せばよい。セパラブルエフェクトの一つ目の条件は  $e = \sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解出来ることであるが、これは純粋エフェクトをうまくもってくることで各成分が 0 以上のベクトルならばこの形に分解することが出来る。同様に二つ目の条件は  $e = u - \sum_i \lambda'_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解できることであるが、純粋エフェクトをうまくもってくることで、各成分が 1 以下のベクトルならばこの形に分解することが出来る。二つの条件を合わせると、各成分が 0 以上 1 以下のベクトルならばセパラブルである。したがって、任意の合成系のエフェクトはセパラブルである。□

古典論ではこのセパラブル/エンタングルメントの定義は良さそうであることが分かった。次に量子論にはエンタングルしたエフェクトは存在するかを調べたい。状態のエンタングルメントでは Bell 状態という有名な例があった。Bell 状態の 1 つを密度行列の形で書くと、

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。 $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  は状態であるが、同時に  $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| \leq \mathbf{1}$  を満たすのでエフェクトでもある。このエフェクト  $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  がエフェクトの意味でエンタングルしていることを背理法を用いて示す。 $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  がセパラブルであると仮定する。

$$e_A^i = \begin{pmatrix} a_A^i & b_A^i \\ b_A^i & c_A^i \end{pmatrix}, \quad e_B^i = \begin{pmatrix} a_B^i & b_B^i \\ b_B^i & c_B^i \end{pmatrix}$$

<sup>28</sup> ここで、 $\sum_i \lambda_i = 1$  という条件を外したことがポイントである。

をそれぞれ A 系と B 系のエフェクトとする。このとき、これらの合成エフェクトは

$$e_A^i \otimes e_B^i = \begin{pmatrix} \frac{a_A^i a_B^i}{a_A^i b_B^i} & \frac{a_A^i b_B^i}{a_A^i c_B^i} & \frac{b_A^i a_B^i}{b_A^i b_B^i} & \frac{b_A^i b_B^i}{b_A^i c_B^i} \\ \frac{a_A^i b_B^i}{b_A^i a_B^i} & \frac{a_A^i c_B^i}{b_A^i b_B^i} & \frac{b_A^i b_B^i}{c_A^i a_B^i} & \frac{b_A^i c_B^i}{c_A^i b_B^i} \\ \frac{b_A^i a_B^i}{b_A^i b_B^i} & \frac{b_A^i b_B^i}{b_A^i c_B^i} & \frac{c_A^i a_B^i}{c_A^i b_B^i} & \frac{c_A^i b_B^i}{c_A^i c_B^i} \\ \frac{b_A^i b_B^i}{b_A^i c_B^i} & \frac{b_A^i c_B^i}{c_A^i a_B^i} & \frac{c_A^i b_B^i}{c_A^i c_B^i} & \frac{c_A^i c_B^i}{c_A^i c_B^i} \end{pmatrix}$$

である。\$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ がセパラブルとすると、これに非負の係数 \$\lambda\_i\$ を書けて、足し合わせると \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ となるような \$\lambda\_i\$ と \$e\_A^i, e\_B^i\$ が存在する。行列 \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ の成分が 0 である行列の成分に着目すると、\$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ は純粋エフェクトなので、\$e\_A^i \otimes e\_B^i\$ の該当する成分は 0 である。すなわち、

$$a_A^i b_B^i = b_A^i a_B^i = a_A^i \overline{b_B^i} = a_A^i c_B^i = b_A^i \overline{b_B^i} = b_A^i c_B^i = \overline{b_A^i} a_B^i = \overline{b_A^i} b_B^i = c_A^i a_B^i = c_A^i b_B^i = \overline{b_A^i} c_B^i = c_A^i \overline{b_B^i} = 0$$

である。\$b\_A^i = 0\$ の場合、行列 \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ の (1,4) 成分と (4,1) 成分が 0 となってしまう。\$b\_A^i \neq 0\$ の場合、\$b\_B^i = 0\$ なので、先の場合と同様に行列 \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ の (1,4) 成分と (4,1) 成分が 0 となる。したがって、どのような場合にも行列 \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ の (1,4) 成分と (4,1) 成分は 0 になり、矛盾している。\$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ はエンタングルしている。ここでは定義の分解が成り立つかどうかを判定してエンタングルしているかどうかを判定していたが、次の第 5 章ではエフェクトのエンタングルメントを検出する方法として、双対版 Bell-CHSH 不等式を導入する。

エフェクトのエンタングルメントを定義したので自然に物理量のエンタングルメントも定義することが出来る。

**定義 4.8 (物理量のエンタングルメント).** \$\mathcal{F}\$ を \$\sigma\$ 代数とする。\$\mathcal{E}\$ を合成系のエフェクト空間とする。\$A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}\$ を物理量とする。任意の \$X \in \mathcal{F}\$ に対して、エフェクト \$A(X)\$ がセパラブルであるとき、物理量 \$A\$ はセパラブルであるという。

セパラブルでない物理量をエンタングルした物理量と定義する。

式 (3) の Bell 基底で作られる物理量<sup>29</sup>は、

$$\begin{aligned} A(00) &= |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, & A(01) &= |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \\ A(10) &= |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|, & A(11) &= |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| \end{aligned}$$

であるが、先に確認したようにエフェクト \$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|\$ がエンタングルしているので、この物理量 \$A\$ はエンタングルした物理量である。

#### 4.5 合成系の状態空間とエフェクト空間の双対性

合成系の状態空間とエフェクト空間の対応関係は表 2 のように表される。作り方から明らかに、最大テンソル積状態空間の双対空間は最小テンソル積エフェクト空間で、最小テンソル積状態空間の双対空間は最大テンソル積エフェクト空間である。また、量子論の合成系の公理「合成系はヒルベルト

<sup>29</sup> Bell 測定と言われることが多い。

空間のテンソル積である。」という規則から得られる、状態空間とエフェクト空間はもちろん双対である。

状態空間	$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$	$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$	$\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$
エフェクト空間	$\mathcal{E}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$	$\mathcal{E}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$	$\mathcal{E}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$

表 2: 合成系の状態空間とエフェクト空間の双対性

本論文の目標は現実の物理が最小テンソル積状態空間でも、最大テンソル積状態空間でもないことを示し、合成系の候補を狭めることである。このためには、直接、物理が  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  や  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  でないことを確認しても良いし、双対空間を調べて  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$  や  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$  ではないことを確認しても良い。あとで見ていくのは、合成系の状態空間を下から抑えるときには状態空間を直接調べ、上から抑えるときには双対空間であるエフェクト空間を下から抑えるという方針で理論を狭めていく。すでに述べたが、最小テンソル積状態空間  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  は、セパラブル状態全体の集合と一致する。同様に最小テンソル積エフェクト空間  $\mathcal{E}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{E}(\mathcal{H}_B)$  はセパラブルエフェクト全体の集合と一致している。したがって、セパラブル状態でない状態 (=エンタングルした状態) が存在することを確認すればその理論は最小テンソル積状態空間でないことが分かり、セパラブルエフェクトでないエフェクト (=エンタングルしたエフェクト) が存在することを確認すればその理論は最小テンソル積エフェクト空間でないことが分かる。

## 第 5 章 Bell-CHSH 不等式

エンタングルメントを検出するために、Bell の不等式や CHSH 不等式という不等式の破れを調べれば良い。もともと Bell 不等式や CHSH 不等式は局所实在論を否定するために導入されたものであるが、現代的にはエンタングルメントを検出する方法と捉えることもできる。最初に、Bell の不等式と CHSH 不等式についてレビューを行なう。

### 5.1 Bell の不等式と CHSH 不等式

Einstein, Podolsky, Rosen は局所实在論に従わない量子物理は不完全であり、変数を追加することで説明されるべきだと主張していた [22]。この主張を否定するため Bell は次の不等式 [23] を提案した。アリスとボブがスピン  $1/2$  の粒子の測定を行なうことを考える。アリスは  $\vec{a}$  方向のスピンを測定し、ボブは  $\vec{b}$  方向のスピンを測定する。Bell は局所实在論を次のように定式化した。Bell はアリスとボブの間で共有されている隠れた変数 (hidden variable) として  $\lambda$  を導入し、局所实在論で隠された変数が共有されている状況で Bell の不等式が成り立つことを示した。さらに量子論においては Bell の不等式が破れることを理論的に示した。したがって、量子論が局所实在論では理解できないことを明らかにしたのである。

Bell の不等式は次のように定式化される。アリスの測定結果  $A$  は測定する方向  $\vec{a}$  と隠れた変数  $\lambda$  に依存し、ボブの測定結果  $B$  は測定する方向  $\vec{b}$  と隠れた変数  $\lambda$  に依存する。アリスとボブの測定結果はスピンの上か下かなので、測定して上が出た場合は  $+1$ 、測定して下が出た場合は  $-1$  とする。こうして、スピンの期待値が計算できる。隠れた変数に依存する確率分布  $p(\lambda)$  を用いると、アリスとボブの測定結果の積の期待値は

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda p(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (5)$$

で与えられる。このとき、

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \quad (6)$$

が成り立つというのが Bell の不等式である。

その後、Clauser, Horne, Shimony, Holt の 4 人がその不等式をより実験可能な形へと一般化した [24]。

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 2 - P(\vec{b}', \vec{b}) - P(\vec{b}', \vec{c}). \quad (7)$$

式 (7) と三角不等式を用いると、最近の論文でよく使われる CHSH 不等式の形である、

$$\left| P(\vec{a}, \vec{b}) + P(\vec{b}', \vec{b}) + P(\vec{b}', \vec{c}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 2 \quad (8)$$

が示される。

量子論ではこの不等式が破られることを示す実験も行なわれた。実験的にも量子物理は (8) を破ることが示されている。Bell-CHSH 不等式の破れを検証した実験としては、Alain Aspect らの実験

[25–27] が有名である. 式 (8) の左辺をエンタングルした光子対を準備して測定したところ,

$$S_{\text{expt}} = 2.697 \pm 0.015$$

であったと報告している [26]. その後も, Bell-CHSH の検証実験には量子論に局所实在論を仮定しても実験の状況次第ではベルの不等式が破られるような抜け道 (Loopholes) があることが指摘された [28–30] が, 2015 年にそのような抜け道も許さないような実験がなされた [31–33].

量子論では式 (8) が破れることは分かったが, どのくらいまで破れるだろうか. すなわち, (8) の左辺の最大値はどれくらいだろうか.

$$B = \langle A_0 B_0 \rangle + \langle A_0 B_1 \rangle + \langle A_1 B_0 \rangle - \langle A_1 B_1 \rangle \quad (9)$$

の (絶対値の) 最大値を Cirel'son 限界というが, 理論が  $S_A \otimes_{\min} S_B$  のときは  $|B|$  は 2 以下となる. すなわち, 式 (8) は破れない. 一方で, 理論が  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  のとき<sup>30</sup>,  $|B|$  の最大値は  $2\sqrt{2}$  であることを Cirel'son が証明した [34]. このことは,  $A_i^2 = \mathbf{1}$ ,  $B_i^2 = \mathbf{1}$  を満たす作用素  $A_i$ ,  $B_i$  に対して成り立つ, Khalfin-Tsirelson<sup>31</sup>-Landau 恒等式 [35, 36]

$$(A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1)^2 = 4 \times \mathbf{1} - [A_0, A_1][B_0, B_1]$$

を用いて,

$$|\text{tr}[\rho(A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1)]| \leq \|A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1\| \leq \sqrt{4 + 2 \times 2} \leq \sqrt{8}$$

と証明できる.

現代的にはエンタングルメントを検出する手法とみることも出来る. つまり, セパラブル状態にたいしては  $-2 \leq B \leq 2$  が成り立つので,  $B$  を測定して  $-2$  以下あるいは  $2$  以上となれば, 準備した状態はエンタングルしていたことがわかる.  $X = A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1$  とおく. CHSH 不等式の左側の不等式に着目すると, セパラブル状態  $\rho_s$  に対して  $-2 \leq B$  であるが, 両辺に  $2$  を足すことで,  $B + 2 = \text{tr}[\rho_s(X + 2)] \geq 0$  である. あるエンタングルした状態については,  $\text{tr}[\rho_s(X + 2)] < 0$  となるから,  $X + 2$  はエンタングルメントウィットネスであることがわかる. 同様に,  $2 - X$  もまたエンタングルメントウィットネスである. したがって, CHSH 不等式はある種のエンタングルメントウィットネスを見ているのに他ならないのである.

## 5.2 Bell-CHSH 不等式の双対版

CHSH 不等式を用い, その破れを確認することによって, 実際の物理が  $S_A \otimes_{\min} S_B$  ではないことを確認できることがわかった. 残念なことに Bell-CHSH 不等式の議論では, 実際の物理が式 (2) の右辺ではないことは示せない. なぜなら, 理論が  $S_A \otimes_{\max} S_B$  であっても,  $|B|$  の最大値は  $2\sqrt{2}$  より大きくはならないからである. すなわち,  $|B|$  を調べていただけでは,  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  と  $S_A \otimes_{\max} S_B$  の違いは分からない. これらの状態空間の違いを理解するためには, 新しい量を定義する必要がある.

<sup>30</sup> 各系はスピン 1/2 の物理系と限らない任意の  $\mathcal{H}_A$  と  $\mathcal{H}_B$  でも  $2\sqrt{2}$  が最大値であることを Cirel'son が証明した.

<sup>31</sup> Cirel'son と Tsirelson は表記が異なるだけで同一人物である.



通常の CHSH 不等式は状態のエンタングルメントの検出に用いることが出来るが、双対版 Bell-CHSH 不等式は状態の双対概念である物理量のエンタングルメントの検出に用いることが出来る。

式 (2) の中辺と右辺を区別するために、新たに次の値を定義した。

$$D = E(\rho_0^A, \rho_0^B, M) + E(\rho_0^A, \rho_1^B, M) + E(\rho_1^A, \rho_0^B, M) - E(\rho_1^A, \rho_1^B, M). \quad (10)$$

ここで、 $E(\rho^A, \rho^B, M) := 2 \operatorname{tr} [(\rho^A - \mathbf{1}/2) \otimes (\rho^B - \mathbf{1}/2) M]$  で、 $M$  は測定出力が  $-1$  か  $1$  の観測量であるとする。式 (9) と形がよく似ているが、実際に式 (10) は式 (9) の双対版とみなすことが出来る。POVM 要素  $M_1$  と  $M_{-1}$  を用いて、

$$\begin{aligned} E(\rho^A, \rho^B, M) &= 2 \operatorname{tr} [(\rho^A - \mathbf{1}/2) \otimes (\rho^B - \mathbf{1}/2) (M_1 - M_{-1})] \\ &= 2 \operatorname{tr} [(\rho^A - \mathbf{1}/2) \otimes (\rho^B - \mathbf{1}/2) (M_1 - (\mathbf{1} - M_1))] \\ &= 4 \operatorname{tr} [(\rho^A - \mathbf{1}/2) \otimes (\rho^B - \mathbf{1}/2) M_1] \end{aligned}$$

と表すことができる。

$M_1 = M_1^A \otimes M_1^B$  と書けるとき、

$$\begin{aligned} E(\rho^A, \rho^B, M) &= 4 \operatorname{tr} [(\rho^A - \mathbf{1}/2) \otimes (\rho^B - \mathbf{1}/2) M_1^A \otimes M_1^B] \\ &= \operatorname{tr} [2(\rho^A - \mathbf{1}/2) M_1^A] \operatorname{tr} [2(\rho^B - \mathbf{1}/2) M_1^B] \end{aligned} \quad (11)$$

と分解できる。このとき、各トレースについて次の性質がある。

補題 5.1.  $0 \leq X \leq \mathbf{1}$  なる作用素  $X$  について、

$$-1 \leq \operatorname{tr} [2(\rho - \mathbf{1}/2) X] \leq 1$$

が成り立つ。

**証明.** 量子ビット系なので任意の状態  $\rho$  はパウリ行列  $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z)$  を用いて、 $\rho = \mathbf{1}/2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}/2$  ( $\vec{r} \in \mathbb{R}^3, |\vec{r}| \leq 1$ ) と表わせ、任意の  $0 \leq X \leq \mathbf{1}$  なる作用素  $X$  は  $X = d\mathbf{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}$  ( $|\vec{s}| \leq d \leq 1 - |\vec{s}|$ ) と表すことができる。したがって、示す式の中辺は、

$$\begin{aligned} \left| 2 \operatorname{tr} \left[ \vec{r} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2} (d\mathbf{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) \right] \right| &= 2 |\vec{r} \cdot \vec{s}| \\ &\leq 2 |\vec{r}| |\vec{s}| \quad (\text{Cauchy-Schwarz inequality}) \\ &\leq 1 \quad (|\vec{r}| \leq 1 \text{ と } |\vec{s}| \leq 1/2) \end{aligned}$$

となるので、補題の証明は完了する。 □

新たに、

$$\begin{aligned} A_0 &:= \operatorname{tr} [2(\rho_0^A - \mathbf{1}/2) M_1^A], & A_1 &:= \operatorname{tr} [2(\rho_1^A - \mathbf{1}/2) M_1^A], \\ B_0 &:= \operatorname{tr} [2(\rho_0^B - \mathbf{1}/2) M_1^B], & B_1 &:= \operatorname{tr} [2(\rho_1^B - \mathbf{1}/2) M_1^B] \end{aligned}$$

と定義すると、 $M_1 = M_1^A \otimes M_1^B$  のとき式 (10) は

$$D = A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1$$

となる。このとき、次の双対版 Bell-CHSH 不等式がなりたつ。

定理 5.2 (積エフェクトに対する双対版 Bell-CHSH 不等式). エフェクトが  $M_1 = M_1^A \otimes M_1^B$  のように分解できる二値測定  $M$  を考える. このとき, 不等式

$$-2 \leq D \leq 2 \quad (12)$$

が成り立つ.

証明. 証明方法はオリジナルの Bell-CHSH 不等式の証明と同様である. 補題 5.1 を用いて,

$$\begin{aligned} |D| &\leq |A_0 B_0 + A_0 B_1 + A_1 B_0 - A_1 B_1| \\ &\leq |A_0 B_0 + A_0 B_1| + |A_1 B_0 - A_1 B_1| \\ &\leq |A_0| |B_0 + B_1| + |A_1| |B_0 - B_1| \\ &\leq |B_0 + B_1| + |B_0 - B_1| \\ &\leq 2 \max(B_0, B_1) \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

したがって, 不等式 (12) が成り立つ. □

$D$  のエフェクトの凸結合に対するアフィン性から,  $e = \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  ( $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$ ) なるエフェクトについては, 同様の不等式が成立する. 一方で,  $e = \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解できないようなセパラブルエフェクトについては不等式が成り立たないことがある. 例えば,

$$\begin{aligned} \rho_i^A = \rho_i^B = |0\rangle\langle 0| &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考える. まず,  $M_1 = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| = \mathbf{1} - |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|$  と分解できるので, この物理量はセパラブルである. 一方で,

$$E(\rho_i^A, \rho_i^B, M) = 4 \operatorname{tr} \left[ \frac{\sigma_z}{2} \otimes \frac{\sigma_z}{2} M_1 \right] = \operatorname{tr} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2$$

となるので,  $D = 2 + 2 + 2 - 2 = 4$  となり,  $|D| \leq 2$  とならない.

したがって, この双対版 Bell-CHSH 不等式の破れでは, 物理量のエンタングルメントを検出出来ないように思われるが, 次のように物理量に制限をかけて, 双対版 Bell-CHSH 不等式を用いれば, 物理量のエンタングルメントを検出することが可能になる.

定理 5.3 (双対版 Bell-CHSH 不等式). 完全混合状態  $\rho_0 = \mathbf{1}/2$  を準備して物理量  $M$  の期待値を測定したとき,  $|\operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]| \geq 1/2$  となる出力が 1 または  $-1$  の二値測定を考える<sup>32</sup>. この物理量がセ

<sup>32</sup> この条件は  $|\operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 (M_1 - M_{-1})]| = |\operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 (2M_1 - \mathbf{1})]| = |2 \operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M_1] - 1| \geq 1/2$  から,  $\operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M_1] \leq 1/4$  または  $\operatorname{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M_1] \geq 3/4$  なるエフェクト  $M_1$  を POVM 要素としても物理量  $M$  に限定しているのと同じである.

パラブルならば

$$-2 \leq D \leq 2$$

が成り立つ.

**証明.**  $\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M_1] \leq 1/4$  とする. このとき,  $\text{tr}[M_1] \leq 1$  である. いま物理量  $M$  はセパラブルであるので, 正の実数  $\lambda_i$  を用いて,  $M_1 = \sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i$  の形に分解できる. 和を分解し,  $\lambda$  を調整することで,  $e_A^i$  と  $e_B^i$  はランクが1の射影演算子とすることが出来る. したがって,  $\text{tr}[e_A^i] = 1, \text{tr}[e_B^i] = 1$  である. 以上より,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \text{tr}[M_1] \\ &= \text{tr} \left[ \sum_i \lambda_i e_A^i \otimes e_B^i \right] \\ &= \sum_i \lambda_i \end{aligned}$$

が示せる. すなわち, エフェクト  $M_1$  は,  $M_1 = \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  ( $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$ ) の形に分解できる. 同様にして,  $\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M_1] \geq 3/4$  なるエフェクト  $M_1$  は  $M_1 = \mathbf{1} - \sum_i p_i e_A^i \otimes e_B^i$  ( $p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$ ) の形に分解できる.

したがって,  $D$  のエフェクトの凸結合に対するアフィン性を用いると, 定理 5.2 が拡張できる.  $\square$

この定理を使えば, まず完全混合状態  $\rho_0 \otimes \rho_0$  について物理量  $M$  が  $|\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]| \geq 1/2$  を満たすかを確認し, その物理量  $M$  の  $D$  の絶対値が2を超えれば, その物理量がエンタングルしていたことが確かめられる.

## 第6章 量子コンピュータ

第5章で定義した量は実験的に測れるものだろうか. 実験で検証できないならば, 物理的に実証可能な理論から量子論を見たとは言えない. そこで, IBM社が提供する Quantum Experience というクラウドの量子コンピュータを用いて実験することを試みた. 実際の量子物理で  $|D|$  の値が2を超えて  $2\sqrt{2}$  に到達することを IBM の量子コンピュータを用いて検証した. この量子コンピュータは5量子ビットまで用いることが出来るが, 今回はアリスとボブの2つの系しか必要ないので, 2量子ビットしか使用していない.

### 6.1 量子コンピュータの動作原理

IBM Quantum Experience は超伝導量子ビットで動作する量子コンピュータである. この章ではその仕組みについて述べたい.

量子コンピュータは量子ビットに情報をもたせ, 量子ビットに様々な操作を行なうことで情報処理を行なうものである. この量子ビットとしては, 原子や分子, 光子, イオンなど様々なものが候補として考えられてきたが, IBM Quantum Experience や D-Wave といった近年注目されている量子コンピュータは超伝導量子ビットが利用されている. 超伝導量子ビットと一口に言っても, 磁束量子ビットやクーパ対を用いたボックスの電荷量子ビットなどがあるが, 最近ではトランズモン型の超伝導量子ビットの開発が行なわれている. トランズモン型の量子ビットは本質的には LC 共振回路のようなものである.

超伝導量子ビットは回路量子電磁気学 (circuit Quantum Electrodynamics) の言葉で記述される. 回路量子電磁気学は共振器量子電磁気学 (Cavity Quantum Electrodynamics) と比較されて議論される. そこで, まずは共振器量子電磁気学について述べる. 電子が主量子数  $n$  の大きい原子軌道に励起された状態をリュードベリ状態といい, その状態の原子であるリュードベリ原子という. このリュードベリ原子が Cavity-QED においては重要な役割を果たす. リュードベリ原子は水素原子的なポテンシャルを感じて運動し, 大きな双極子モーメントをもつので, 電場や磁場と強く相互作用し, 操作性が高い. このリュードベリ原子を circuit-QED では超伝導回路に置き換えたものが, circuit-QED である. 超伝導回路がこのリュードベリ原子に対応し, 電子の速度に対応するものがコンデンサに蓄えられた電荷で, 電子の力に対応するものがインダクタ (コイル) を通る磁束である. また, リュードベリ原子は共振器中の光子と相互作用させるが, circuit-QED においてこの光子に対応するものがマイクロ波光子である. 電荷を  $\hat{q}$ , 磁束を  $\hat{\phi}$  とすると

$$[\hat{\phi}, \hat{q}] = i\hbar$$

という正準交換関係が成り立つ. LC 共振器は調和振動子と同様にすべてのエネルギー準位の間隔が等しいため, 特定の二準位のみを使用したい量子ビットとして用いることが出来ない. そこで量子ビットにするためには非線形性が必要だが, この非線形性をジョセフソン接合 (Josephson junction)

を用いることによって作る。次でこの Josephson 接合について詳しくみていく。

## 6.2 ジョセフソン接合

Josephson 接合とは二つの超伝導体の間に薄い絶縁体の層をはさんだもので、トンネル効果によってクーパー対は超伝導体を行き来することが出来る。Josephson 接合は Feynmann の教科書の三巻 [37] の簡単な導出が有名である。Feynmann の定式化を用いて Josephson 接合について説明する。超伝導体なのでボーズアインシュタイン凝縮からすべての電子が同じ波動関数で表される。これをマクロな波動関数という。絶縁体をはさむんで二種類の超伝導体があり、片方の波動関数を  $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}$ 、もう一方の波動関数を  $\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}$  とする。ここで、 $\rho_i$  はそれぞれの超伝導体における電子の密度、 $\theta_i$  はそれぞれの超伝導体の位相を表している。

シュレディンガー方程式を書くと、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= U_1 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= K \psi_1 + U_2 \psi_2 \end{aligned}$$

となっている。ここで、 $K$  はトンネリングのエネルギー、 $U_1$  と  $U_2$  はそれぞれの超伝導体におけるエネルギーを表している。

これらの超伝導体に電圧  $V$  をかけることを考えると、

$$U_1 - U_2 = qV$$

となっている。エネルギーの原点をこれらの真ん中にとると、

$$U_1 = -U_2 = \frac{qV}{2}$$

である。波動関数を  $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}$ 、 $\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}$  で置き換えて、実部と虚部をわけると、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_1 &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{qV}{2\hbar} \\ \dot{\theta}_2 &= -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{qV}{2\hbar}. \end{aligned}$$

ここで、 $q$  はクーパー対の電荷であることに注意すると、 $q = 2e$  である。二つの超伝導の位相差の時間変化は、

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = \frac{2eV}{\hbar} - \frac{K}{\hbar} \left( \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \right) \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

であり,  $\rho_1$  と  $\rho_2$  がほとんど等しいとすると,  $V$  に比例する値であることが分かる.  $\varphi = \theta_2 - \theta_1$  とおきかえると,

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (13)$$

を得る.

次に,  $\psi_1$  の超伝導体から  $\psi_2$  の超伝導体に流れる電流  $I = \rho_1 = -\rho_2$  を求める.  $I_0 = 2K \sqrt{\rho_1 \rho_2} / \hbar$  と置き換えて,

$$I = I_0 \sin \varphi \quad (14)$$

であることが分かる. 式 (14) は, 超伝導電流と位相差の関係を表している. 二つの超伝導体に位相差があれば, 電圧がかかっていなくても直流電流が流れる. この現象を直流ジョセフソン効果という.

一方, 超伝導体に一定の電圧をかけると式 (13) に従い位相差が一定の割合で変化し, 式 (14) から位相差に応じて周期的な電流が流れる. この現象を交流ジョセフソン効果という.

### 6.3 LC 共振器とジョセフソン接合

電気回路上にジョセフソン接合を入れるとどうなるだろうか. 図 8 のような回路を考える.

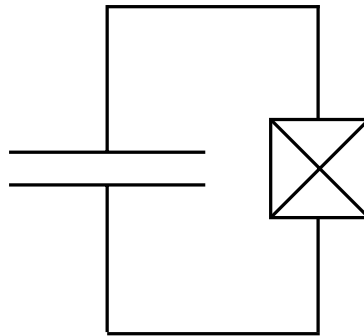


図 8: コンデンサーとジョセフソン接合の電気回路図

コンデンサのエネルギー  $E_C$  は, 式 (13) を用いると,

$$U_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\varphi}^2$$

である. 次に, ジョセフソン接合のエネルギーを計算すると,

$$\begin{aligned} U_L &= \int I V dt \\ &= \int I_0 \sin \varphi \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} dt \\ &= I_0 \frac{\hbar}{2e} \int \sin \varphi d\varphi \\ &= -I_0 \frac{\hbar}{2e} \cos \varphi \end{aligned}$$

である。したがって、ラグランジアンは  $U_C$  を運動項、 $U_L$  をポテンシャル項として、

$$L = \frac{1}{2}C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\varphi}^2 - (-I_0 \frac{\hbar}{2e} \cos \varphi) = \frac{1}{2}C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\varphi}^2 + I_0 \frac{\hbar}{2e} \cos \varphi$$

である。したがって、 $\varphi$  に対して正準共役な運動量  $p_\varphi$  は、

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C \left( \frac{\hbar}{2e} \right)^2 \dot{\varphi} = C \left( \frac{\hbar}{2e} \right) V = \frac{\hbar}{2e} Q = \frac{\hbar}{2e} 2en = \hbar n$$

である。量子化したときの正準交換関係は、

$$[\varphi, p_\varphi] = i\hbar$$

である。いま、 $p_\varphi = \hbar n$  であるから、

$$[\varphi, n] = i$$

であることがわかる。ハミルトニアンは

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \hbar n \frac{2eV}{\hbar} - \frac{1}{2C} (2en)^2 - I_0 \frac{\hbar}{2e} \cos \varphi = \frac{2e^2}{C} n^2 - I_0 \frac{\hbar}{2e} \cos \varphi$$

である。 $E_C = \frac{2e^2}{C}$ ,  $E_J = I_0 \frac{\hbar}{2e}$  とおくと、

$$H = E_C n^2 - E_J \cos \varphi$$

である。通常の LC 共振器の場合は調和振動子であるが、ジョセフソン接合を入れることによって、 $\cos \varphi$  のような非線形効果が入ったのである。こうして、特定の二準位を量子ビットとして用いることが出来るのである。このようにして作った二準位は人工原子のようなものである。

近年では、トランズモン型量子ビットが用いられている。トランズモン (transmon) は transmission-line shunted plasma oscillation qubit から命名された。トランズモン型量子ビットの特徴は  $E_J/E_C$  が大きいことである [38]。その結果、電荷分散が小さくなるので、ノイズへの感度が下がりより良い量子ビットを作ることが出来る。有効ハミルトニアンは

$$H = 4E_C (n - n_g)^2 - E_J \cos \varphi$$

である [38]。

このように LC 共振器 (調和振動子) に非線形項をいれて非調和にして作った“人工原子”をマイクロ波と相互作用させて、量子計算に必要なユニタリ操作や測定などを行なっている。

## 6.4 量子ビット

第 2 章でみたように、量子ビット系の状態空間  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$  は三次元球と同型である。量子ビットの良し悪しを測る指標の 1 つとして縦緩和時間と横緩和時間がある。

縦緩和時間は  $T_1$  と書かれ、スピン-格子緩和時間やエネルギー緩和時間とも呼ばれる。これは励起状態  $|1\rangle$  から基底状態  $|0\rangle$  に緩和するのにかかる時間である。

横緩和時間は  $T_2$  と書かれ、スピン-スピン緩和時間や位相緩和時間とも呼ばれる。これは異なる基底状態  $|0\rangle$  と基底状態  $|1\rangle$  の重ね合わせが維持される時間に対応している。通常は、縦緩和時間は横緩和時間より長く、 $T_1 > T_2$  である。量子ビットに量子性を失わないためにも、この  $T_2$  が長いほうが良い量子ビットであると言える。

今回実験で用いた IBM の量子コンピュータの量子ビットは縦緩和時間  $T_1$  が  $40\mu\text{s}$  から  $80\mu\text{s}$  くらいで、 $T_2$  が  $40\mu\text{s}$  から  $120\mu\text{s}$  くらいである。5つある量子ビットは量子ビットごとに性能差があるが、縦緩和時間や横緩和時間のオーダーはだいたい同じくらいである。



## 第 7 章 実験

### 7.1 実験に利用する量子回路

実験ではアリス 2 種類, ボブ 2 種類の状態を準備して, 2 人でベル測定を行なう. 状態の準備については, 式 (10) にあるように, 4 種類の状態を準備する必要がある. 準備する状態は次の 4 つの状態である.

$$\begin{aligned} &|0\rangle, \\ |+\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), \\ |\pi/4\rangle &:= \frac{1}{2} (1 + e^{i\pi/4}) |0\rangle + \frac{i}{2} (1 - e^{i\pi/4}) |1\rangle, \\ |7\pi/4\rangle &:= \frac{1}{2} (1 + e^{-i\pi/4}) |0\rangle + \frac{i}{2} (1 - e^{-i\pi/4}) |1\rangle \end{aligned}$$

さらに, 式 (10) にあるように, 完全混合状態  $\mathbf{1}/2$  を引く必要があるので, 先の状態に対応する Bloch 球の対蹠点の,

$$\begin{aligned} &|1\rangle, \\ |-\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle), \\ |5\pi/4\rangle &:= \frac{1}{2} (1 - e^{i\pi/4}) |0\rangle + \frac{i}{2} (1 + e^{i\pi/4}) |1\rangle, \\ |3\pi/4\rangle &:= \frac{1}{2} (1 - e^{-i\pi/4}) |0\rangle + \frac{i}{2} (1 + e^{-i\pi/4}) |1\rangle \end{aligned}$$

という状態も準備し, これらを次の方法で組み合わせることによって, 式 (10) の値を求めた. 例えば, アリスの状態  $|0\rangle\langle 0|$  とボブの状態  $|0\rangle\langle 0|$ , 物理量  $X$  のについて,

$$2 \operatorname{tr} \left[ \left( |0\rangle\langle 0| - \frac{\mathbf{1}}{2} \right) \otimes \left( |0\rangle\langle 0| - \frac{\mathbf{1}}{2} \right) X \right]$$

を求めたい場合,

$$\begin{aligned} &|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| \\ &|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| \\ &|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| \\ &|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

の 4 通りの状態の組み合わせを準備して, 物理量  $X$  の測定を行なって,

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| X] \\ &\operatorname{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| X] \\ &\operatorname{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| X] \\ &\operatorname{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| X] \end{aligned}$$

を実験的に求めた上で,

$$\frac{1}{2} (\text{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| X] - \text{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| X] - \text{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| X] + \text{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| X])$$

を計算する. この値は,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\text{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| X] - \text{tr} [|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| X] - \text{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| X] + \text{tr} [|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1| X]) \\ &= 2 \text{tr} \left[ \left( \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) |00\rangle\langle 00| + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) |01\rangle\langle 01| + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) |10\rangle\langle 10| + \frac{1}{4} |11\rangle\langle 11| \right) \right] \\ &= 2 \text{tr} \left[ \left( |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| - \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes |0\rangle\langle 0|) + \frac{1}{4} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) X \right] \\ &= 2 \text{tr} \left[ \left( |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 0| \otimes \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \right) X \right] \\ &= 2 \text{tr} \left[ \left( |0\rangle\langle 0| - \frac{1}{2} \right) \otimes \left( |0\rangle\langle 0| - \frac{1}{2} \right) X \right] \end{aligned}$$

から, 求めたい値そのものであることがわかる.

アリスとボブで行なう測定は Bell 測定である. Bell 測定の POVM は次の行列を用いて表現される.

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは, 状態  $\rho$  を準備したとき, 1 が出る確率は  $\text{tr}[\rho M_1]$ , -1 が出る確率は  $\text{tr}[\rho M_{-1}]$  という二値測定を表す.

さらに, エンタングルした物理量が定理 5.3 の双対版 Bell-CHSH 不等式を破ることを検証するためには, 完全混合状態  $\rho_0$  に対して,  $|\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]| \geq 1/2$  となっていることを確認しないとイケない. 先の  $D$  を求める実験のセッティングのまま, データ処理の方法を変えるだけで,  $|\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]| \geq 1/2$  の値を求めることができる. 状態  $|\psi\rangle$  に対して, Bloch 球の対蹠点にあたる状態  $|\bar{\psi}\rangle$  を準備し, これら二つの状態を同じ確率で混合すると,  $\rho_0 = \frac{1}{2} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2} |\bar{\psi}\rangle\langle\bar{\psi}|$  として完全混合状態を作ることができる. 合成系の完全混合状態  $\rho_0 \otimes \rho_0$  は,

$$\begin{aligned} \rho_0 \otimes \rho_0 &= \left( \frac{1}{2} |\psi_A\rangle\langle\psi_A| + \frac{1}{2} |\bar{\psi}_A\rangle\langle\bar{\psi}_A| \right) \otimes \left( \frac{1}{2} |\psi_B\rangle\langle\psi_B| + \frac{1}{2} |\bar{\psi}_B\rangle\langle\bar{\psi}_B| \right) \\ &= \frac{1}{4} |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B| + \frac{1}{4} |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\bar{\psi}_B\rangle\langle\bar{\psi}_B| \\ &\quad + \frac{1}{4} |\bar{\psi}_A\rangle\langle\bar{\psi}_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B| + \frac{1}{4} |\bar{\psi}_A\rangle\langle\bar{\psi}_A| \otimes |\bar{\psi}_B\rangle\langle\bar{\psi}_B| \end{aligned}$$

と, このように Alice の状態 2 種類, Bob の状態 2 種類を混合することで, 準備することができる. すなわち, 先の実験結果の平均を調べればよい.

## 7.2 実験結果

状態の組に対して、先に定義した物理量  $M$  を測定して、出力として 1 が出た回数と確率を求めた。この結果を表 3 に示す。各測定は 8192 回行なった。

A 系の状態	B 系の状態	1 が出た回数	1 が出た確率
$ 0\rangle$	$ \pi/4\rangle$	3418	0.4172
$ 1\rangle$	$ \pi/4\rangle$	947	0.1156
$ 0\rangle$	$ 5\pi/4\rangle$	945	0.1154
$ 1\rangle$	$ 5\pi/4\rangle$	3632	0.4434
$ 0\rangle$	$ 7\pi/4\rangle$	3599	0.4393
$ 1\rangle$	$ 7\pi/4\rangle$	808	0.09863
$ 0\rangle$	$ 3\pi/4\rangle$	742	0.09058
$ 1\rangle$	$ 3\pi/4\rangle$	3923	0.4789
$ +\rangle$	$ \pi/4\rangle$	3599	0.4393
$ -\rangle$	$ \pi/4\rangle$	969	0.1183
$ +\rangle$	$ 5\pi/4\rangle$	854	0.1042
$ -\rangle$	$ 5\pi/4\rangle$	3931	0.4799
$ +\rangle$	$ 7\pi/4\rangle$	876	0.1069
$ -\rangle$	$ 7\pi/4\rangle$	3633	0.4435
$ +\rangle$	$ 3\pi/4\rangle$	3691	0.4506
$ -\rangle$	$ 3\pi/4\rangle$	1028	0.1259

表 3: 実験結果

まず、この実験結果を用いて、 $|\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]|$  を求める。この値を 1 が出る確率の平均から計算すると、 $-0.442$  となった。 $|\text{tr}[\rho_0 \otimes \rho_0 M]| \geq 1/2$  を物理量  $M$  が満たしていなければならないので、 $-0.5$  以下でないといけませんが、やや大きな値が出ている。これは量子コンピュータの不正確さに依存するものだと考えられる。実際、この実験で用いた Bell 測定は理論的には  $-0.5$  丁度になるはずである。

表 3 の実験結果を用いて、 $E(|a\rangle, |b\rangle) = 2 \text{tr}[(|a\rangle\langle a| - \frac{1}{2}) \otimes (|b\rangle\langle b| - \frac{1}{2}) M]$  を求める。 $M$  は二値測定なので、

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}[|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b| M] \\
 &= \text{tr}[|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b| (M_1 - M_{-1})] \\
 &= \text{tr}[|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b| (M_1 - (\mathbf{1} - M_1))] \\
 &= 2 \text{tr}[|a\rangle\langle a| \otimes |b\rangle\langle b| M_1]
 \end{aligned}$$

であることに注意して,

$$\begin{aligned} E(|0\rangle, |\pi/4\rangle) &= 0.4172 - 0.1156 - 0.1154 + 0.4434 = 0.6296 \\ E(|0\rangle, |7\pi/4\rangle) &= 0.4393 - 0.09863 - 0.09058 + 0.4789 = 0.7290 \\ E(|+\rangle, |\pi/4\rangle) &= 0.4393 - 0.1183 - 0.1042 + 0.4799 = 0.6967 \\ E(|+\rangle, |7\pi/4\rangle) &= 0.1069 - 0.4435 - 0.4506 + 0.1259 = -0.6616 \end{aligned}$$

と求められる。したがって、 $D$  の値を計算すると,

$$\begin{aligned} D &= E(|0\rangle, |\pi/4\rangle) + E(|0\rangle, |7\pi/4\rangle) + E(|+\rangle, |\pi/4\rangle) - E(|+\rangle, |7\pi/4\rangle) \\ &= 0.6296 + 0.7290 + 0.6967 - (-0.6616) \\ &= 2.717 \end{aligned}$$

であった。

さらに誤差評価を行なう。誤差評価については、二値測定を  $n$  回<sup>33</sup>繰り返すので確率  $p$  の二項分布<sup>34</sup>を考えればよい。二項分布の標準偏差<sup>35</sup>は  $\sqrt{np(1-p)}$  なので、確率の誤差は測定回数  $n$  と平均確率  $p$  を用いて、 $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$  である。さらに、二値測定で得られた確率を足し引きして、 $D$  を計算しているの、 $D$  の誤差については誤差伝播<sup>36</sup>の法則を用いて計算する必要がある。誤差伝播とは、 $a$  と  $b$  の誤差が、 $\Delta a$  と  $\Delta b$  であるとき、 $a \pm b$  の誤差は、

$$\Delta(a \pm b) = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

で誤差が計算できるというものである<sup>37</sup>。二項分布の標準誤差と誤差伝播の公式を用いて、 $D$  の誤差の計算を行なうと

$$D = 2.72 \pm 0.04$$

<sup>33</sup> 今回の実験では 8192 回繰り返した。

<sup>34</sup> 二項分布とは二項係数  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  を用いた分布である。具体的には、1 回の試行の成功確率が  $p$  であるとき、 $n$  回の試行中  $k$  回成功する確率はそれぞれの試行が独立であるとする  $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  であり、この分布を  $(n, p)$ -二項分布という。

<sup>35</sup>  $(n, p)$ -二項分布の期待値  $EB_{n,p}$  は、

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_k B_{n-1,p}(k) = np$$

である。 $(n, p)$ -二項分布の分散  $\text{Var } B_{n,p}$  は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,p}(k) - EB_{n,p}^2 \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,p}(k) + kB_{n,p}(k) - n^2 p^2 \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + np - n^2 p^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

である。したがって、標準偏差は  $\sqrt{np(1-p)}$  である。

<sup>36</sup> 誤差伝播を調べてみると、誤差伝搬と書いてある文献がある。伝播は propagation という単語の訳語であるが、伝搬は伝播を「でんぱん」と誤読し変化したようである。

<sup>37</sup> 誤差伝播の法則は  $x$  と  $y$  に依存した値  $f(x, y)$  について、誤差が  $x + \sigma_x$ ,  $y + \sigma_y$  である場合に、テイラー展開を用

であることが分かった. この  $D$  の値は 2 を大きく超えている. 理論的には,  $2\sqrt{2}$  になるはずである. しかし,  $2\sqrt{2}$  には誤差を含めても届いていない. これは, 先と同様に量子コンピュータの量子ビットは環境によるノイズに弱いため, 系統誤差が発生しているためと考えられる.

---

いて,

$$f(x + \sigma_x, y + \sigma_y) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \sigma_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_y$$

と近似できるので,

$$\sigma_f^2 = (f(x + \sigma_x, y + \sigma_y) - f(x, y))^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_x \sigma_y$$

である. したがって,  $x$  と  $y$  に相関がない場合は右辺の第三項は無視できるので,  $f$  の誤差  $\sigma_f$  は

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}$$

と求められる. さらに,  $f = x \pm y$  のときには,  $\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$  と簡単な形にすることが出来る. 本論文ではこの公式を用いて誤差伝播の計算を行なった.

## 第8章 おわりに

### 8.1 まとめ

本論文では量子論の合成系の公理である「量子論の状態空間はヒルベルト空間のテンソル積で与えられる」という規則を、物理的な原理から導出することを試みた。先行研究として、瞬間伝送禁止則と局所識別性を満たす合成系の状態空間は  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  から  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  の間にあるということが分かっていた。量子論でよく知られた Bell-CHSH 不等式を用いると、量子論の合成系の状態空間は  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\min} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  より大きいことは分かっていたが、 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  より小さいかどうかは不明であった。そこで新たに式 (10) として  $D$  という値を定義し、双対版 Bell-CHSH 不等式を導出した。この、双対版 Bell-CHSH 不等式の破れを検証することで、 $\mathcal{S}(\mathcal{H}_A) \otimes_{\max} \mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$  でないことが示すことが出来る。実際に、IBM のクラウド量子コンピュータを用いて、この不等式の破れを示した。

したがって、 $\mathcal{S}_A \otimes_{\min} \mathcal{S}_B \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \subseteq \mathcal{S}_A \otimes_{\max} \mathcal{S}_B$  のように、量子ビットの合成系の状態空間は最小でも最大でもなくその間であることがわかった。

### 8.2 議論

量子論の合成系の状態空間は最大でも最小でもないことは証明できたが、この理論によってどのくらい合成系の選択肢を狭めることが出来たかは明らかではなく、最終目標である量子論の合成系の公理の導出には至っていない。通常の Bell-CHSH 不等式であっても、最大にエンタングルした状態が1つ存在すれば、不等式の破れが最大の  $2\sqrt{2}$  となる。したがって、下からも十分には抑えられていない。このためには状態空間の対称性を課して、対象な状態についても同様に Bell-CHSH 不等式を破るとすれば、合成系の選択肢をさらに狭めることが出来ると考えている。

双対版 Bell-CHSH 不等式は理論的にも実験的にも満足のかない点がある。双対版 Bell-CHSH 不等式は任意のセパラブルエフェクト (物理量) に対して成り立つものではない。この点を踏まえて、任意のセパラブル物理量について成り立つ不等式へと理論を改良する余地がある。また、量子ビット系に限定していたが、一般の量子系の合成系において成り立つ不等式へと改良する余地もある。実験結果については量子ビットに対する環境からの影響が大きいことから、理論的に予測される結果には届いていない。より良い実験結果を出すためにも、汎用的に利用できるような量子コンピュータではなく、この物理量のエンタングルメントの検出のために実験系を組むことでより精度を高めた実験をしていく必要がある。

本研究を一般確率論に応用することも考えられる。一般確率論では、自然に定義できる状態空間が最小テンソル積状態空間か最大テンソル積状態空間しかない。したがって、たいていの研究ではこのあいだのどのテンソル積においても成り立つ性質か [6]、いずれかの合成系の状態空間であると仮定して成り立つ性質を調べている [39]。一般確率論には瞬間伝送禁止則が成り立つにも関わらず、

Bell-CHSH 不等式を 4 まで破るようなモデルが存在する [40]. このようなモデルは 1 古典ビットを送ると、多くの情報を送ることが出来てしまうので、非物理的であり、新たな物理原理として情報因果律という原理が提唱された [41]. 本研究のアプローチを一般確率論に応用することで、物理的に自然な合成系を一般確率論に定義することが出来るかもしれない.

本論文では状態変化を扱っていない. 状態変化は量子情報処理において最も重要な性質である. 量子コンピュータは、行なうことが出来る状態変化が豊富であればあるほど、コンピュータはパワフルであるだろう. 実際、最小テンソル積状態空間や最大テンソル積状態空間の場合は物理的に可能でかつ情報処理に用いることが出来る状態変化が少なく、ヒルベルト空間のテンソル積から導入された量子論の状態空間においては物理的に実現可能でかつ情報処理に用いることが出来る状態変化が豊富に含まれていると予想している. この実際の量子論の最大でも最小でもなく間にあるという性質が、量子コンピュータの情報処理能力の高さの根拠であると予想している.

## 謝辞

修士課程の間に丁寧なご指導と数多のご助言を頂いた指導教官の宮寺 隆之准教授にこの場を借りて深く感謝を申し上げます。また、京都大学大学院工学研究科原子核工学専攻の量子物理学研究室の皆様には、有意義な議論や助言を通じて、大変お世話になりました。特に、無限次元のヒルベルト空間や作用素代数、統計学について教えてくださった PD の倉持 結氏と一般確率論について議論してくださった小林 政友氏にはとても感謝しています。ありがとうございます。

また、本研究で使用させていただいた IBM Quantum Experience に感謝申し上げます。この論文の見解は著者のものであり、IBM または IBM Quantum Experience チームの公式の方針や見解を反映していません。

最後に、学生生活を支えていただいた両親と友人に御礼申し上げます。



## 参考文献

- [1] C. L. Kane and E. J. Mele, Phys. Rev. Lett. **95**, 146802 (2005).
- [2] L. Susskind, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995).
- [3] G. Birkhoff and J. Von Neumann, Ann. Math. **37**, 823 (1936).
- [4] J. V. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Julius Springer, 1932).
- [5] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, Vol. 101, International series of monographs on physics (Oxford University Press, 1999).
- [6] H. Barnum, J. Barrett, M. Leifer, and A. Wilce, Phys. Rev. Lett. **99**, 240501 (2007).
- [7] G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, Phys. Rev. A **84**, 012311 (2011).
- [8] B. Dakić and Č. Brukner, *Quantum theory and beyond: is entanglement special?*, edited by H. Halvorson, 2011.
- [9] L. Masanes and M. P. Müller, New J. Phys. **13**, 063001 (2011).
- [10] A. Wilce, in *Probability in physics*, edited by Y. Ben-Menahem and M. Hemmo (Springer Berlin Heidelberg, 2012), pp. 281–298.
- [11] L. Hardy, in *Quantum theory: informational foundations and foils* (Springer Netherlands, 2016), pp. 223–248.
- [12] X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, et al., Nature **489**, 269 (2012).
- [13] H. Barnum and A. Wilce, in *Quantum theory: informational foundations and foils* (Springer Netherlands, 2016), pp. 367–420.
- [14] P. Janotta and R. Lal, Phys. Rev. A **87**, 052131 (2013).
- [15] A. Wilce, Int. J. Theor. Phys. **31**, 1915 (1992).
- [16] I. Namioka and R. Phelps, Pac. J. Math. **31**, 469 (1969).
- [17] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [18] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Physics Letters A **223**, 1 (1996).
- [19] M. Horodecki and P. Horodecki, Phys. Rev. A **59**, 4206 (1999).
- [20] N. J. Cerf, C. Adami, and R. M. Gingrich, Phys. Rev. A **60**, 898 (1999).
- [21] H. Barnum, C. A. Fuchs, J. M. Renes, and A. Wilce, arXiv:quant-ph/0507108 (2005).
- [22] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [23] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
- [24] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).
- [25] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [26] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [27] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [28] A. Garg and N. D. Mermin, Phys. Rev. D **35**, 3831 (1987).
- [29] P. H. Eberhard, Phys. Rev. A **47**, 747 (1993).
- [30] J. Barrett, D. Collins, L. Hardy, A. Kent, and S. Popescu, Phys. Rev. A **66**, 042111 (2002).

- [31] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, et al., *Nature* **526**, 682 (2015).
- [32] L. K. Shalm, E. Meyer-Scott, B. G. Christensen, P. Bierhorst, et al., *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250402 (2015).
- [33] M. Giustina, M. A. M. Versteegh, S. Wengerowsky, J. Handsteiner, et al., *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250401 (2015).
- [34] B. S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).
- [35] L. A. Khal'fin and B. S. Tsirelson, *Quantum and Quasi-classical Analogs Of Bell Inequalities*, 1985.
- [36] L. J. Landau, *Lett. Math. Phys.* **14**, 33 (1987).
- [37] R. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. III (1965).
- [38] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, et al., *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007).
- [39] P. Janotta, C. Gogolin, J. Barrett, and N. Brunner, *New J. Phys.* **13**, 063024 (2011).
- [40] S. Popescu and D. Rohrlich, *Found. Phys.* **24**, 379 (1994).
- [41] M. Pawłowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, et al., *Nature* **461**, 1101 (2009).