量子スピン系におけるLieb-Robinson Bounds
～厳密統計力学入門～

松井卓（九州大学数理学研究院)

matsui@math.kyushu-u.ac.jp

講演の要約

格子上での量子力学の平衡状態，基底状態の性質を解析するための方法として「Lieb-Robinson Bounds」がある．Lieb-Robinson Bounds とその応用の解説を行う．

1　厳密統計力学　イジング模型を例に

以下では，Lieb-Robinson Bounds を使った量子スピン系の基底状態に関連した結果の解説を行う．

非可換ゲージ場の量子論，超弦理論などはファイマン積分を数学として厳格に定義することの困難さのために数理物理的な意味合いで理論全てを厳格に扱うことが困難な対象である．対照的に統計力学の問題は，数学の問題として定式化することが可能である場合が多い．数学の問題になるからといえ，問題が解けるわけではないが，前世紀にイジング模型の平衡状態の研究などでは一定の成果があがったと思う．統計力学の問題を厳格に扱い研究する分野を，通常，厳密統計力学と呼ぶ．Lieb-Robinson Bounds と直接関係はないが，導入として厳密統計力学において最も上手く成果のあがったイジング模型の平衡状態と量子イジング模型の基底状態に関する結果を述べて，無限自由度の系で無限遠での境界条件の効果を説明したい．

最初にイジング模型を説明するために記号を準備する．簡単のため二次元整数格子上のイジング模型を考える．$\mathbb{Z}$ は整数全体を表し，$\mathbb{Z}^2$ を二次元平面上で座標

が整数である格子点全体とする: $\mathbb{Z}^2 = \{\,(i,j) \mid i,j \in \mathbb{Z}\,\}$. イジング模型は二次元格子の各格子点 $k \in \mathbb{Z}^2$ 上に（古典）スピン変数 $\sigma^{(k)}$ がのっている古典統計力学の模型である．スピンは上向きと下向きのどちらかを向いていて，各格子点でのスピン変数の値は $\sigma^{(k)} = 1$ または $\sigma^{(k)} = -1$ であるとする．全ての格子点でのスピンの値が定まっているときスピン配置が定まっているいう．Λ_L を $\mathbb{Z}^2$ の中の原点を中心とする一辺の長さが L の正方形とする．スピン配置を与えるとイジング模型の Λ_L でのハミルトニアン（エネルギー関数）$H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma)$ が次式で定まるとする:

$$H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma) = -\sum_{((k,l))\subset\Lambda_L,} \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)} - h\sum_{k\in\Lambda_L}\sigma_z^{(k)}.$$

ここで $k=(k_1,k_2)$ と $l=(l_1,l_2)$ は $\mathbb{Z}^2$ の格子点であり，$((k,l))$ は最近接な k と l の組（隣同士の k と l の組 $|k-l| = |k_1-l_1|+|k_2-l_2| = 1$）である．また h は外場の強さを表す（実数の）パラメータである．

次に平衡状態とスピンの相関関数を定める．T を平衡状態での温度，k をボルツマン定数とし逆温度を $\beta = 1/kT$ により定める．スピンの関数（$\sigma^{(a)}$ の有限積と有限和）$F(\sigma)$ の期待値 $(F(\sigma))_L^{(\beta,h)}$ を

$$(F(\sigma))_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}}\left(\sum_\sigma e^{-\beta H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma)}F(\sigma)\right), \quad Z_L^{(\beta,h)} = \sum_\sigma e^{-\beta H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma)},$$

により定める．ここでスピン変数 σ の和は，全ての Λ_L 内のスピン配置に関する和である．特に一点相関関数 $\left(\sigma^{(k)}\right)_L^{(\beta,h)}$ 及び二点相関関数 $\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(l)}\right)_L^{(\beta,h)}$ を

$$\left(\sigma^{(k)}\right)_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}}\sum_\sigma e^{-\beta H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma)}\sigma^{(k)},$$

$$\left(\sigma^{(k)}\sigma^{(l)}\right)_L^{(\beta,h)} = \frac{1}{Z_L^{(\beta,h)}}\sum_\sigma e^{-\beta H_L^{\mathrm{Ising}}(h)(\sigma)}\sigma^{(k)}\sigma^{(l)},$$

により定める．

定理 1.1. 任意の外部磁場 h，任意の逆温度 β に対して熱力学的極限（体積無限極限）

$$\lim_{L\to\infty}(F(\sigma))_L^{(\beta,h)} = (F(\sigma))^{(\beta,h)},$$

が存在する．臨界逆温度 β_c が存在し，次の結果が成り立つ．
(i) $0 < \beta < \beta_c$ であれば，任意の $F(\sigma)$ に対して

$$\lim_{h\downarrow 0} \left(f(\sigma)\right)^{(\beta,h)} = \lim_{h\uparrow 0} \left(f(\sigma)\right)^{(\beta,h)} = \left(f(\sigma)\right)^{(\beta,0)},$$

が成り立つ．
(ii) $\beta > \beta_c$ であるとき

$$\lim_{h\downarrow 0} \left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)} = -\lim_{h\uparrow 0} \left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)} > 0, \tag{1.1}$$

が成立する．

イジング模型のハミルトニアンでスピンの上下を一斉に入れかえる変換を考えると $\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)} = -\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,-h)}$ となることが分かり，特に $h=0$ であるときイジング模型のハミルトニアンはスピンの上下を一斉に入れかる変換で不変であるので $\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,0)} = 0$ である．したがって (1.1) の式は外場をかけて温度を低くすると磁化のヒステリシスがあることを示す．また一点関数がゼロにならないということは低温では自発的対称性の破れがあることを意味する．

次に見るようにヒステリシスは無限遠の境界条件の効果であると理解できる．外部磁場はゼロとする（$h=0$）．境界エネルギー $W_L(\sigma)$ を

$$W_L(\sigma) = -\sum_{\substack{((k,l))\cap\Lambda_L\neq\emptyset \\ ((k,l))\cap\Lambda_L^c\neq\emptyset}} \sigma^{(k)}\sigma^{(l)}$$

, で定める．つまり $((k,l))$ の和は領域 Λ_L と Λ_L の外部の両方にまたがる最近接な k と l の組で和と取る．+ 境界条件および − 境界条件での平衡状態を次式で定める．

$$\left(F(\sigma)\right)_{L,\pm} = \frac{1}{Z_{L,\pm}} \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm 1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))} F(\sigma),$$

$$Z_{L,\pm} = \sum_{\sigma:\sigma^{(k)}=\pm 1, k\in\Lambda_L^c} e^{-\beta(H_L^{\mathrm{Ising}}(0)(\sigma)+W_L(\sigma))}.$$

ここで和は Λ_L の内部では全ての可能なスピン配置を取り，Λ_L の外部ではスピン配置は 1 または -1 に固定している．

定理 1.2. 任意の逆温度 β に対して熱力学的極限（体積無限極限）

$$\lim_{L\to\infty}\left(F(\sigma)\right)_{L,\pm}=\left(F(\sigma)\right)_{\pm}^{(\beta)},$$

が存在し, 次の結果が成り立つ.
(i) $0<\beta\le\beta_c$ であれば，任意の $F(\sigma)$ に対して

$$\left(F(\sigma)\right)_{+}^{(\beta)}=\left(F(\sigma)\right)_{-}^{(\beta)}=\left(F(\sigma)\right)^{(\beta,0)},$$

が成り立つ.
(ii) $\beta>\beta_c$ であるとき

$$\begin{aligned}\left(F(\sigma)\right)_{+}^{(\beta)}&=\lim_{h\downarrow 0}\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)},\\ \left(F(\sigma)\right)_{-}^{(\beta)}&=\lim_{h\uparrow 0}\left(\sigma^{(k)}\right)^{(\beta,h)},\\ \left(F(\sigma)\right)^{(\beta,0)}&=1/2\left\{\left(F(\sigma)\right)_{+}^{(\beta)}+\left(F(\sigma)\right)_{-}^{(\beta)}\right\},\end{aligned}\tag{1.2}$$

が成立する.

このように、低温では無限遠でスピンが+1となるような境界条件を課した熱平衡状態が外部磁場を上からゼロへ持ってゆく極限と一致する．すなわち,

イジング模型の相転移は無限遠の境界条件の影響で起こる.

日本語のイジング模型の平衡状態に関しては，最近出版された
原隆・田崎晴明（著）相転移と臨界現象の数理　（共立出版）
が良い参考文献である.

次に量子 Ising 模型の基底状態について知られている結果を述べる．簡単のため可解系である一次元の場合に限るが, 高次元整数格子の場合も同様の結果が証明できる．スピン１／２の一次元量子スピン系を考える．$\sigma_\alpha^{(k)}(\alpha=x,y,z,\ k\in\mathbb{Z})$ を格子点 k 上にあるパウリスピン行列とする．$\sigma_\alpha^{(k)}$ は

$$(\sigma_\alpha^{(k)})^2=1,\quad \sigma_x^{(k)}\sigma_y^{(k)}-\sigma_y^{(k)}\sigma_x^{(k)}=i\sigma_z^{(k)},\quad \left[\sigma_\alpha^{(k)},\sigma_\beta^{(l)}\right]=0,\qquad (k\neq l),$$

をみたす．L, M は整数で $L < M$ であるとする．区間 $[L, M](\subset \mathbb{Z})$ 上の量子 Ising 模型のハミルトニアンは

$$H_{[L,M]} = -\lambda \sum_{k=L}^{M} \sigma_x^{(k)} - \sum_{k=L}^{M-1} \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)},$$

である．ここで λ は縦方向への外場の強さを表す実パラメータ．このハミルトアニンに対して $e^{-\beta H_{[L,M]}}$ は全ての成分が正である有限サイズの行列である．

定理 1.3. (Perron-Frobenius の定理)
A は成分が全て正の実対称行列であるとする．A の最大固有値 R は非退化であり（重複度が１）, 固有値 R に対応する固有ベクトルとして全ての成分が正であるようなベクトルが存在する．

Perron-Frobenius の定理を $e^{-\beta H_{[L,M]}}$ に応用すると，$H_{[L,M]}$ の基底状態は非退化であることが分かる．$H_{[L,M]}$ の基底状態ベクトルを $\Omega_{[L,M]}$ とし，基底状態エネルギーとその他の励起エネルギーの間のギャップを $\Delta_{[L,M]}$ で表すと次の結果が成立する．

定理 1.4. 局所物理量 Q に対して $\left(\Omega_{[L,M]}, Q\Omega_{[L,M]}\right) = \omega_{[L,M]}(Q)$ とおき，基底状態の熱力学的極限で得られる状態 ω;

$$\lim_{L\to-\infty, M\to\infty} \omega_{[L,M]}(Q) = \omega(Q),$$

を考える．臨界外場 $\lambda_{\mathrm{cr}} > 0$ が存在し，以下が成立する．(i) $\lambda_{\mathrm{cr}} < \lambda$ であるとき: 全ての L, M に対してスペクトル・ギャップが開く: $0 < \Delta < \Delta_{[L,M]}$. ω は純粋状態であり，ω の二点相関関数は指数的減衰する．
(ii) $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ であるとき:

(a) スペクトル・ギャップは漸近的に閉じる:

$$\lim_{(M-L)\to\infty} \Delta_{[L,M]} = 0.$$

(b) $\sigma_z^{(k)}$ の相関関数に関して長距離秩序がある．すなわち，ある定数 c が存在し

$$\omega(\sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)}) - \omega(\sigma_z^{(k)})\omega(\sigma_z^{(l)}) \geq c,$$

となる（ハミルトニアンの $\mathbb{Z}_2$ 不変性により $\omega(\sigma_z^{(k)}) = 0$ である）．

(c) 無限体積基底状態 ω は純粋状態ではない．ある状態 $\omega^{\pm}$ があり局所物理量 Q の期待値は

$$\omega(Q) = \frac{1}{2}(\omega^{+}(Q) + \omega^{-}(Q)),$$

となる．ただし，$\omega^{\pm}$ は次のように定まる．基底状態ベクトル $\Omega_{[L,M]}$ と直交するベクトル $\xi_{[L,M]}$ があり，ベクトル $\Omega^{\pm}_{[L,M]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Omega_{[L,M]} \pm \xi_{[L,M]}\}$ により定まる状態

$$\omega^{\pm}_{[L,M]}(Q) = \left(\Omega^{\pm}_{[L,M]}, Q\Omega^{\pm}_{[L,M]}\right),$$

を $\omega^{\pm}_{[L,M]}(Q)$ と表すと

$$\omega^{\pm}(Q) = \lim_{\substack{L\to-\infty \\ M\to\infty}} \omega^{\pm}_{[L,M]}(Q),$$

により $\omega^{\pm}$ は与えられる．

この定理 1.4 は，外場 λ が大きいとスピンは外場の方向を向き，λ が小さいと基底状態はイジング模型の基底状態的振るまいをするということを意味する．

イジング模型の相転移と量子イジング模型の基底状態の縮退は二つの意味で関係する．第一に，二次元系では Jordan-Wigner 変換を通してどちらの模型も自由フェルミ粒子系で表示できる．イジング模型の + 境界条件および − 境界条件に対応するのは量子イジング模型の $\omega^{\pm}$ である．第二, に量子イジング模型の基底状態の相関関数はファイマン積分的な表式があるが，イジング模型の平衡状態にスピンを flip する効果を加えた形となっている．この意味で古典スピン系の d+1 次元の平衡状態と量子系の d 次元の基底状態は対応する．すなわち，

有限系では励起状態に見える状態も無限自由度の系になると基底状態のように見える場合がある

ことが分かった．

高次元格子上の量子イジング模型の基底状態については

G.Grimmett, Jakob Björnberg

The phase transition of the quantum Ising model is sharp

Journal of Statistical Physics 136 (2009) 231-273

が基本的な文献である．

以下では熱力学的極限で基底状態に収束する状態も体積無限大での基底状態と呼び，ハミルトニアンのスペクトル・ギャップも体積無限大での基底状態と他の励起状態のエネルギーのギャップとして捉えることにする．

2 無限格子上の量子スピン系の基底状態

次に無限自由度の量子スピン系の Lieb-Robinson Bounds と基底状態に関する結果を述べるための準備を行う．

最初に正方行列あるいはヒルベルト空間上の作用素のノルム（長さ）を定義する．$\mathfrak{H}$ は有限次元ベクトル空間（あるいはヒルベルト空間）とし，Q は $\mathfrak{H}$ 上の行列（線形作用素）とする．

$$||Q|| = \sup\{||Q\xi|| \mid \xi \in \mathfrak{H}, ||\xi|| = 1\},$$

により作用素 Q のノルム $||Q||$ を定める．

作用素 Q のノルム $||Q||$ に関して次が成立する．

(i) $\mathfrak{H}$ が有限次元であり Q がエルミート行列であるとき，$||Q||$ は Q の固有値の絶対値の最大値である．Q がエルミート行列でないときは，Q^*Q の固有値の絶対値の平方根の最大値である．

(ii) $\mathfrak{H}$ が無限次元であり Q が自己共役 $Q = Q^*$ である時は連続スペクトルがあれば連続スペクトルの絶対値と固有値の絶対値の中での上限である．

(iii) 以下の式が成立する．

$$\begin{aligned} &||Q + R|| \leq ||Q|| + ||R||, \quad ||QR|| \leq ||Q|| \cdot ||R||, \\ &||Q^*Q|| = ||Q||^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

量子スピン系の局所物理量のなす C^*-代数について述べる．簡単のため整数格子 $\mathbb{Z}^d$ 上のスピン系の場合に述べるが，一般のグラフの上でも同様である．格子点を $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathbb{Z}^d)$ と表し，各格子点 k 上には，状態が n 次元空間のベクトルで表される部分物理系があり，物理量は n 行 n 列の行列で表されるとする．行

列代数 $M_n(\mathbb{C})$ ($n \times n$ の行列全体) の無限テンソル積 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ を考える．$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ では，各テンソル積の成分は各格子点 k で指定されいて, $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元 Q では，有限個の格子点を除きテンソル積の成分は 1 であるとする．このようにして定まる $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ を以下では

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \otimes_{\mathbb{Z}^d} M_n(\mathbb{C}), \tag{2.2}$$

と記す．格子点 k 上にある物理量は

$$Q^{(k)} = \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes Q \otimes 1 \otimes \cdots ,$$

の形で表される．ただし，Q の入っているテンソル積の成分は格子点 k に対応する．$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は $Q^{(k)}$ の形の元の積と和で表されるもの全体である．$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元を局所物理量と呼ぶことにする．局所物理量 Q のテンソル積の成分は有限個をのぞき 1 である．$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元 Q のノルム $||Q||$ を 有限の大きさの行列のノルムで定め，$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ にノルムが定まる．$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ を完備化することにより量子スピン系の局所物理量のなす C^*-代数 $\mathcal{A}$ を定める．ここで，$\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の完備化であるとは，以下の性質 (a) , (b) , (c) が成り立つことである:

(a) $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ を含む代数であり，$\mathcal{A}$ の元 Q に対して Q^* が定まり (2.1) が成り立つような $||Q||$ のノルムが定まる．

(b) 全ての $\mathcal{A}$ の元 Q は局所物理量 $Q_i \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ で近似可能 $\lim_{i\to\infty} ||Q_i - Q|| = 0$ であるように $\mathcal{A}$ が定まっている．

(c) $\mathcal{A}$ の元からなるコーシー列は収束する．すなわち $Q_k \in \mathcal{A}$, $\lim_{k,l\to\infty} ||Q_k - Q_l|| = 0$ であれば，ある $Q \in \mathcal{A}$ に Q_k は収束する:

$$\lim_{k\to\infty} ||Q - Q_k|| = 0.$$

例えば, 有理数全体のなす集合の完備化は実数全体である．

Λ を $\mathbb{Z}^d$ の部分集合とし，$\mathcal{A}_\Lambda$ は Λ の中に局在する局所物理量全体とする．言い換えると $k \in \Lambda$ の範囲でいろいろな $Q^{(k)}$ をとり，それらの積と和からなる $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の要素全体を $\mathcal{A}_\Lambda$ とする．

定義 2.1. (局所性)

共通部分を持たない Λ_1, Λ_2 に関しては $[\,Q\,,\,R\,] = 0$, $(\,Q \in \mathcal{A}_{\Lambda_1},\,R \in \mathcal{A}_{\Lambda_2}\,)$ が成立する．この可換性を局所性と呼ぶことにする．

以下では量子系の状態といえばヒルベルト空間のベクトルではなく局所物理量のなす代数 $\mathcal{A}$ の物理量の期待値を示すことにする．基底状態を考えるときにも混合状態、純粋状態の両方を考慮する必要があるためである．

定義 2.2. (状態)
(i) φ が $\mathcal{A}$ の状態であるとは φ は $\mathcal{A}$ から複素数への写像で次をみたすとする:

$$\varphi(Q+R) = \varphi(Q) + \varphi(R), \quad \varphi(cQ) = c\varphi(Q),$$
$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(Q^*Q) \geq 0, \quad Q, R \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ が純粋状態であるとは, φ は二つの相異なる状態の凸和では表せないことと定める．すなわち, $0 < \lambda < 1$ と状態 ψ_1, ψ_2 を使い

$$\varphi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2,$$

となるならば，$\varphi = \psi_1 = \psi_2$ である．

有限量子系の場合 (n 次正方行列のなす代数 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ の場合），純粋状態はある単位ベクトルの内積から定まる状態である．有限量子系では，一般の状態 φ は密度行列 ρ を用いて $tr(\rho Q) = \varphi(Q)$ と表される．この場合は密度行列は，ただ一通りに定まる．ところが無限次元の系ではトレースが定まらない場合もあれば，トレースがあっても状態に対応する密度行列が定まらないこともある．一方，与えられた状態からヒルベルト空間と状態を表すベクトルを復元する方法はある．

定義 2.3. ($\mathcal{A}$ の表現)
$\{\pi(\cdot), \mathcal{H}\}$ が $\mathcal{A}$ の表現であるとは, $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であり，$\pi(\cdot)$ は $\mathcal{A}$ から $\mathcal{H}$ 上の作用素への写像で，以下の条件をみたすことである;

$$\pi(Q+R) = \pi(Q) + \pi(R), \;\; \pi(cQ) = c\pi(Q),$$
$$\pi(QR) = \pi(Q)\pi(R) \quad \pi(Q^*) = \pi(Q)^*, \quad Q, R \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

命題 2.4. (GNS 表現)
φ が $\mathcal{A}$ の状態であるとき，φ に付随して次のような $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$ とベクトル $\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ がある．

(i) ベクトル Ω_φ が定める期待値は，状態 φ の期待値と等しい．

$$(\Omega_\varphi, \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi) = \varphi(Q), \quad Q \in \mathcal{A}.$$

(ii) $\pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi$ $(Q \in \mathcal{A})$ の形のベクトルは $\mathcal{H}_\varphi$ の中で全体である．すなわち $\pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi$ $(Q \in \mathcal{A})$ の形の全てのベクトルと直交するベクトル $\xi \in \mathcal{H}_\varphi$ は零ベクトルである．

$$\xi \perp \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi, \quad (\,{}^\forall Q \in \mathcal{A}\,) \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$$

3 Lieb-Robinson Bounds

次に量子スピン系の無限自由度の系の基底状態とスペクトル・ギャップを考えたい．有限領域 Λ での時間発展を支配するハミルトニアン H_Λ は

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X, \tag{3.1}$$

のように有限領域に局在した $\Psi(X)$ の和とする．例えば一次元ハイゼンベルク模型のハミルトニアンは

$$H_\Lambda = \sum_{((i,i+1)) \subset \Lambda} h_i, \quad h_i = \sum_{\alpha = x,y,z} \sigma_\alpha^{(i)} \sigma_\alpha^{(i+1)} \in \mathcal{A}_{\{i,i+1\}},$$

であり (3.1) の形で書ける．

以下では主に，Λ を格子全体にする極限を考えたい．系の時間発展は（形式的）ハミルトニアン

$$H = \sum_{X \subset \mathbb{Z}^d} \Psi(X), \quad \Psi(X) = \Psi(X)^* \in \mathcal{A}_X, \tag{3.2}$$

で定まるとする．形式的ハミルトニアンは無限和であり，繰り込みのような操作をしないと収束しない．しかしながら, 後に見るように物理量 $Q \in \mathcal{A}$ の時間発展 $e^{itH} Q e^{-itH}$ は定義できる．

量子イジング模型の基底状態の場合のように，システムサイズを大きくすると漸近的に基底状態エネルギーに近づくエネルギーを持つ励起状態は体積無限大の基底状態と見なす立場を取ることにする．

定義 3.1. (i)(3.2) において H を相互作用 $\Psi(X)$ に付随したハミルトニアンと呼ぶ.
(ii) ある $0 < R$ があり X の半径が R より大きいとき $\Psi(X) = 0$ となるとき，相互作用 $\Psi(X)$ は Finite Range であるという.

局所物理量の格子上の並進 τ_k を以下の式をみたすものとして定める.

$$\tau_k(Q^{(l)}) = Q^{(l+k)}, \quad (k, l \in \mathbb{Z}^d),$$

$$\tau_k(A+B) = \tau_k(A) + \tau_k(B)\,,\ \tau_k(AB) = \tau_k(A)\tau_k(B),\ \tau_k(A^*) = \tau_k(A)^*, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

定義 3.2. (i) $\tau_k(\Psi(X)) = \Psi(X+k)$ が成立するとき，相互作用 $\Psi(X)$ に付随したハミルトニアン H は並進不変であるという.
(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ に対して $\varphi(\tau_k(Q)) = \varphi(Q)$ が全ての $Q \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{Z}^d$ で成立するとき φ は並進不変であるという.

以下では Λ は原点を中心とする $\mathbb{Z}^d$ の中の立方体とする.

$$\Lambda = \left\{ k = (k_1, k_2, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \ | \ |k_j| \leq L/2,\ (j = 1, \cdots d) \right\}.$$

また簡単のため相互作用 $\Psi(X)$ は並進不変であるとする．$\Psi(X)$ に付随したハミルトニアンと (3.1) および (3.1) により定まるハミルトニアンをそれぞれ H_Λ と H とし，

$$\alpha_t^{(\Lambda)}(Q) = e^{itH_\Lambda} Q e^{-itH_\Lambda}, \quad Q \in \mathcal{A},$$

とおく．次に Lieb-Robinson Bounds について述べよう.

$F(r)$ は正で非増加実関数で，格子点 $i, j \in \mathbb{Z}^d$ にたいして正定数 $\tilde{C}_{i,j}$ があり

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} F(|j-k|)F(|i-k|) \leq \tilde{C}_{i,j} F(|j-i|), \tag{3.3}$$

が成立するとする．$F(r)$ として $F(r) = (1+r)^{-(d+1)}$ または $F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ を使う.

$$||\Psi||_{\text{int}} = \sup_{j,k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{X : X \ni j,k} \frac{||\Psi(X)||}{F(|j-k|)}, \tag{3.4}$$

により $||\Psi||_{\text{int}}$ を定義する．さらに

$$S_\Lambda(X) = \{ Z \subset \Lambda : Z \cap X \neq \emptyset \text{ および } Z \cap X^c \neq \emptyset \},$$

$S(X) = S_{\mathbb{Z}^d}(X)$ とし X の Ψ 境界 $\partial_\Psi X$ を

$$\partial_\Psi X = \{x \in X | Z \in S(X) \text{ で } x \in Z \text{ かつ } \Psi(Z) \neq 0 \text{ となるものが存在する }\}$$

により定める．$\mathbb{Z}^d$ の部分集合 X と Y の距離 $d(X,Y)$ を　$d(X,Y) = \min\{|j-k| | j \in X, k \in Y\}$ で定める．

定理 3.3. (Lieb-Robinson Bounds)
任意の $A \in \mathcal{A}_X$ と $B \in \mathcal{A}_Y$ に対して

$$||[B, \alpha_t^{(\Lambda)}(A)]|| \leq \frac{2||A||\,||B||}{C}\left(e^{2C||\Psi||_{\text{int}}|t|} - 1\right) D(X,Y), \tag{3.5}$$

が成立する．ただし $C = \sup_{k,l} \tilde{C}_{kl}$,

$$D(X,Y) = \min\left[\sum_{i\in\partial_\Psi X}\sum_{j\in Y} F(|j-i|)\,,\ \sum_{k\in\partial_\Psi Y}\sum_{l\in X} F(|k-l|)\right], \tag{3.6}$$

である．

特に与えられた $F(r)$ に対して $F_\mu(r) = e^{-\mu r}F(r)$ とおくと (3.3) と同じ不等式が成立する．

$$||\Psi||_{\text{int},\mu} = \sup_{j,k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{X:X\ni j,k}\frac{||\Psi(X)||}{F_\mu(|j-k|)},$$

とおく．

$$\begin{aligned} D(X,Y) \leq \quad & \min\left[|\partial_\Psi X|, |\partial_\Psi Y|\right] \\ & e^{-\mu d(X,Y)} \sup_{i\in Y}\sum_{j\in Y} F(|j-i|), \end{aligned}$$

が成り立ち，次の評価を得る．

$$\begin{aligned} ||[B, \alpha_t^{(\Lambda)}(A)]|| \leq \quad & \frac{2||A||\,||B||}{C_\mu}\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} F(|i-j|)\ \min\left[|\partial_\Psi X|, |\partial_\Psi Y|\right] \\ & \times \exp\left(-\mu\left[d(X,Y) - \frac{2C_\mu||\Psi||_{\text{int},\mu}}{\mu}|t|\right]\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

$F_{(\mu)}(r) = e^{-\mu r}(1+r)^{-(d+1)}$ とすると $C_\mu = 2^{d+1}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} e^{\mu|j|}(1+|j|)^{-(d+1)}$ と取れて，$v_\Psi = \frac{2C_\mu||\Psi||_{\mathrm{int},\mu}}{\mu}$ とおくと

$$||[B,\alpha_t^{(\Lambda)}(A)]|| \le 2||A||\,||B|| \ \min\left[|\partial_\Psi X|,|\partial_\Psi Y|\right] e^{-\mu[d(X,Y)-v_\Psi|t|]}, \tag{3.8}$$

が成り立つ．この最後の式 (3.8) と類似の不等式を E.Lieb - D.Robinson が最初に導いたので Lieb-Robinson Bounds と呼ばれている．局在化した物理量が群速度 v_Ψ 程度の速さで空間に広がってゆく様子を表す式である．

相対論的場の量子論とここで考える格子模型では局所性の概念が大きく異なる．

R.Haag 等による相対論的な場の量子論の枠組みにおいては局所性を次のように理解する．４次元時空内の共通部分も持たない４次元領域を X と Y とする．($X,Y\subset\mathbb{R}^{1+3}, X\cap Y=\emptyset$) もし X と Y の間が光速で行き来できないならば物理的情報は交換できないので X に局在する物理量 Q_X と Y と局在する物理量 Q_Y に対して $[Q_X,Q_Y]=0$ と考える．

一方，ここで考えている格子模型では特定の時刻で空間の有限領域に局在する物理量，例えば原点にある $\sigma_x^{(0)}$ を考えるとハイゼンベルク時間発展により時刻 t で $\sigma_x^{(k)}$ は $e^{itH}\sigma_x^{(0)}e^{-itH}$ へと動くが， $e^{itH}\sigma_x^{(0)}e^{-itH}$ は有限の領域に局在しているわけではない．領域 X にある別の局所的な物理量 Q と $e^{itH}\sigma_x^{(0)}e^{-itH}$ の非可換性の度合いを評価するのが Lieb-Robinson Bounds なのである．

次に Lieb-Robinson Bounds の最初の応用として体積が無限大の極限での局所物理量のハイゼンベルク時間発展 $\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d}\alpha_t^{(\Lambda)}(Q)=\alpha_t(Q)$ の存在を述べる．

定理 3.4. 前節で述べた $||\Psi||_{\mathrm{int}}$ が有限であるとする．任意の $Q\in\mathcal{A}$ に対して次の極限は C^* ノルムで収束する．

$$\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d}\alpha_t^{(\Lambda)}(Q)=\alpha_t(Q) \tag{3.9}$$

(3.9) における極限は t が有界閉集合を動く範囲で一様に収束し，無限系での Lieb-Robinson Bounds

$$\begin{aligned} &||\,[\,Q\,,\,\alpha_t(R)\,]\,|| \le \frac{2||Q||\,||R||}{C}\left(e^{2C||\Psi||_{\mathrm{int}}|t|}-1\right)D(X,Y),\\ &Q\in\mathcal{A}_X,\quad R\in\mathcal{A}_Y, \end{aligned} \tag{3.10}$$

が成立する．

4 Lieb-Robinson Boundsの応用

Lieb-Robinson Boundの応用としてスペクトル・ギャップを持つ基底状態に関しての結果を述べよう．最初に無限自由度の系で基底状態とスペクトル・ギャップをどう考えるか述べる．量子イジング模型の基底状態の例で見るように一般にハミルトニアンの固有状態で最低エネルギーより大きなエネルギーを持つが体積無限大の極限で基底状態に近づく状態がある．ここでは，体積無限大の極限で基底状態に近づく状態も基底状態と見なすことにする．

有限量子系（有限次元の行列で表される系）のハミルトニアン H の最低固有値の固有ベクトルを ξ とする．ξ から定まる状態を ω とおく．つまり，物理量を表す作用素を Q として $\omega(Q)=(\xi,Q\xi)$．また $\delta(Q)=[H,Q]$ とおくと

$$\omega(Q^*\delta(Q))\geq 0,$$

が成立する．逆にベクトル ξ から定まる純粋状態 ω がこの不等式をみたすとき ξ は基底状態ベクトルであることが示せる．

また基底状態が一意的（固有ベクトルの次元が１）でエネルギーとその他の励起状態エネルギーのスペクトル・ギャップが γ であるとき

$$\omega(Q^*\delta(Q))\geq\gamma(\omega(Q^*Q)-\omega(Q^*)\omega(Q)),$$

が成立する．逆に，ベクトル ξ から定まる状態を ω がこの不等式をみたすとき，基底状態が一意的でかつスペクトル・ギャップは γ より大きいことが示せる．そこでこれらの不等式を利用して無限自由度の量子スピン系の基底状態を定めることにする．簡単のため相互作用 $\Psi(X)$ は並進不変とする．

定義 4.1. H は並進不変相互作用 $\Psi(X)$ から定まる並進不変なハミルトニアンとする．$||\Psi||_{\mathrm{int}}$ が有限であるとする．$Q\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ に対して $\delta(Q)$ を $\delta(Q)=[H,Q]$ により定める．
(i) $\mathcal{A}$ の状態 φ が H の基底状態であるとは，全ての $Q\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ に対して

$$\varphi(Q^*\delta(Q))\geq 0, \tag{4.1}$$

が成立することと定める．
(ii) H の基底状態 φ がスペクトル・ギャップを持つとは，

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq \gamma(\varphi(Q^*Q) - \varphi(Q^*)\varphi(Q)) \tag{4.2}$$

全ての $Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ に対して成立することと定める．

このとき，φ はスペクトル・ギャップを持つ基底状態 Gapped Ground State であるということにする．

Gapped Ground State は，ハミルトニアンのスペクトルの下限は固有値で縮退がない場合である．基底状態の縮退があり，その上の励起状態エネルギーとの間にスペクトル・ギャップある場合は

$$\varphi(Q^*\delta(\delta(Q))) \geq \gamma(\varphi(Q^*\delta(Q)) \tag{4.3}$$

が同値である．

不等式 (4.1) による定まる基底状態は，次の意味で絶対零度の状態であると見なせる． 有限量子系に話が戻るが，ハミルトニアン H のスペクトルは固有値のみであるとすると逆温度 β の平衡状態 ψ_β は，通常 $\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$ である． 物理量 Q の時間発展を $\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}$ により表すと

$$\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \psi_\beta(Q_2Q_1)$$

が成立する．

定義 4.2. 一般の量子系の時間発展 α_t と状態 ψ に対して

$$\psi(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \psi(Q_2Q_1) \tag{4.4}$$

が成立するとき ψ は *β-KMS* 状態あるいは単に *KMS* 状態であると言う．

KMS は Kubo-Martin-Schwinger の略である．

ハミルトニアン H のスペクトルは固有値のみであるときは，KMS 状態は上に定めた ψ_β でなければならないことが示せる．H のスペクトルが連続スペクトルを含む時でも KMS 状態は定まる場合が多い．例えば理想フェルミおよびボーズ気体では有限系の平衡状態の熱力学的極限で得られる状態は (4.4) をみたし KMS 状態

である．数理物理では無限自由度の量子系では平衡状態をKMS状態として考えることが多い．量子系の時間発展α_tに対して任意のβでKMS状態φ_βが定まっているとき極限$\lim_\beta \varphi_\beta = \varphi$で定まる状態は基底状態の不等式(4.1)をみたすことが示せる．このような意味でKMS状態の絶対零度極限は基底状態である．全ての基底状態がKMS状態の絶対零度極限で得られるかどうかは，分からない．しかし通常の基底状態はKMS状態の絶対零度極限で得られる場合が多い．

Lieb-Robinson Boundsの応用としてGapped Ground Stateの相関関数は以下のように指数的減衰することが証明できる．

定理 4.3. $\Psi(X)$はFinite Rangeかつ並進不変な相互作用であるとする．Hは$\Psi(X)$からから定まるハミルトニアンとし，φはHのGapped Ground Stateする．

$$|\varphi(AB) - \varphi(A)\varphi(B)| \leq C(\Psi, X, Y)||A||||B||e^{-rM}, \quad A \in \mathcal{A}_X, B \in \mathcal{A}_Y, \tag{4.5}$$

ただし，XとYは$\mathbb{Z}^d$の領域でありrはXとYの距離であり，$C(\Psi, X, Y)$はX, Y, 相互作用Ψにより定まる定数，MはΨにより定まる定数である．

一次元系の場合はGapped Ground Stateについてentanglement entropyのarea lawが成立し，Gapped Ground StateはMatrix Product Stateに類似の構造を持つ．以下に述べるarea lawは，M.HastingsがLieb-Robinson Boundを応用して最初に証明した（今では別の証明方法もある）．

定義 4.4. 格子の次元は一次元$(d = 1)$であるとする．
(i) φは$\mathcal{A}$の純粋状態とする．φの$\mathfrak{A}_{[a,b]}$への制限を$\varphi_{[a,b]}$と表し，$\varphi_{[a,b]}$の密度行列は$\rho_{[a,b]}(\varphi)$により表すことにする．$\varphi_{[a,b]}$の量子エントロピー

$$s_{[a,b]}(\varphi) = -\mathrm{tr}(\rho_{[a,b]}(\varphi)\ln(\rho_{[a,b]}(\varphi)))$$

をEntanglement Entropyと呼ぶ.
(ii) φがEntanglement Entropyのarea lawをみたすとは

$$\sup_{0 \leq a < b < \infty} s_{[a,b]}(\varphi) < \infty \tag{4.6}$$

が成立することと定義する．

定理 4.5. 一次元系を考える．$\Psi(X)$ は Finite Range かつ並進不変な相互作用であるとする．H は $\Psi(X)$ からから定まるハミルトニアンとし，φ は H の Gapped Ground State する．このとき φ が Entanglement Entropy の area law をみたす．

Entanglement Entropy の面積則が成立すると基底状態は Matrix Product State に近い形式で表示できる．特に定理 4.5 の副産物として次の結果が分かる．

系 4.6. 一次元並進不変な系を考える．各格子点上，スピン s が半奇数（既約）であるとする．H は Finite Range $SU(2)$ 不変であり，H の純粋基底状態 φ が $SU(2)$ 不変であるとき，次のいずれかが成立する．
(i) φ は並進不変ではない (Dimer 化).
(ii) スペクトル・ギャップは閉じる．

スピン 1/2 の $SU(2)$ 不変な一次元系では $SU(2)$ 不変基底状態ではギャップは閉じるか，周期 2 の並進不変でない周期的基底状態が現れることは経験的には知られていた．上の系は、この状況は極めて一般性があることを意味する．

以上の述べた話は一次元系の話が中心であったが高次元系での Lieb-Robinson Bounds の応用として Gapped Ground State の摂動の安定性がある．量子ホール効果や位相的秩序の安定性に関しての応用があるが，ここでは S.Bravyi, M.Hastings, S.Michalakis 等による Kitaev 模型の摂動に関して述べよう，J. Math. Phys. 51 093512 (2010) (e-print arXiv:1001:0344) Commun. Math. Phys. **307**, 609 (2011) (e-print arXiv:1001:4363) 彼等は Kitaev 模型より一般的な場合に位相的秩序を定義し励起状態も含め摂動に対して安定であることを証明しているが，以下では簡単のため Kitaev 模型の場合に関してのみ述べる．

一番単純な場合の Kitaev 模型を導入する．Kitaev 模型では物理量は $\mathbb{Z}^2$ の各格子点上ではなく格子の辺上にある． 各辺上にスピン 1/2 の自由度があるとする．$\mathbb{Z}^2$ 内のサイズが $k \times k$ である正方形に有限周期境界条件を過したものを T_k とし，この T_k 上の有限量子系を考える． 正方形に有限周期境界条件を過すと，正方形の互いに向かい合う二辺を張りあせることになり，正方形を穴が一つあいたドーナッツ状の曲面の表面と見なすことが出来る．これを二次元トーラスと呼ぶ．T_k は二次元トーラス（穴が一つあいたドーナッツ状の曲面の表面）を四角形で分割

したと見なす．$\mathbb{Z}^2$ の頂点 s に対して，s とつながる辺で積をとり $A_s = \prod \sigma_x^j$ と定める． また，$\mathbb{Z}^2$ の正方形 p に対して p の辺で積をとり $B_p = \prod \sigma_z^j$ と置く．

全てのパウリ行列 σ_x^i，σ_z^j が生成する代数を $\mathcal{A}_k$ とし，A_s および B_p が生成する可換代数を $\mathcal{B}_k$ とおく．

Kitaev 模型のハミルトニアンは

$$H_0 = -\sum_{s\in T_k} A_s - \sum_{p\subset T_k} B_p \tag{4.7}$$

である． A_s と B_p が可換であるので H_0，A_s と B_p は同時対角化可能であり Ω が H_0 の基底状態のベクトルであるという事と全ての A_s と B_p について

$$A_s\Omega = \Omega, B_p\Omega = \Omega \tag{4.8}$$

が成立する事が同値である．

次ぎに Kitaev 模型の基底状態に関して特徴的な事を列挙する．

(i) 局所ゲージ不変性：局所ゲージ変換 γ_s と γ_p を $\gamma_s(Q) = A_s Q A_s^{-1}$， $\gamma_p(Q) = B_p Q B_p^{-1}$ $(Q \in \mathcal{A}_k)$ により定める．任意の基底状態ベクトル Ω から定まる状態 ω について局所ゲージ不変性

$$\omega(\gamma_s(Q)) = \omega(Q), \quad \omega(\gamma_p(Q)) = \omega(Q) \tag{4.9}$$

が成立する．

(ii) 準積状態：局所ゲージ変換に関する不変性を用いると任意の基底状態は次のような準積状態である．Q が局在化する領域 X と R が局在化する領域 Y との距離は 2 より大きいとする．$(Q\mathcal{A}_X, R \in \mathcal{A}_Y, d(X,Y) > 2)$ このとき，

$$\omega(QR) = \omega(Q)\omega(R) \tag{4.10}$$

が成立する．

(iii) 基底状態の縮退：有限トーラス上の Kitaev 模型の基底状態は縮退しているが，Kitaev 模型の基底状態の縮退の次元はトーラスのサイズ k によらず 4 である．体積無限大の系では基底状態はただ一つしかない．

(iv) 位相的秩序：局所ゲージ不変性により，有限トーラス上の異なる基底状態を局所的物理量では区別することは出来ない．ω_1 と ω_2 が Kitaev 模型の基底状態とす

ると $\omega_1(Q)=\omega_2(Q)$ (ただし Q の局在領域は一辺が $k-3$ 以下の正方形の内部であるとする.）トーラス内の一点に縮められないループで $\sigma_x^{(j)}$ の積あるいは $\sigma_z^{(j)}$ の積を取った物理量により区別できる．同様に，トーラスではなく穴の数が g 個のリーマン面上を四角形分割してできる Kitaev 模型の基底状態の縮退の次元は $2g$ である．局所的物理量では基底状態の縮退は区別出来ないが，空間の位相的な性質から定まる大域的物理量で区別できる基底状態の存在がある系を位相的秩序があると言う.

(v) Anyon 的励起：励起状態のベクトルは $\sigma_x^{(j)}$ の積あるいは $\sigma_z^{(j)}$ の積を基底状態ベクトルにかけたものとして定まる．これらの励起は Anyon と理解できる.

有限 Kitaev 模型は人工的な模型ではあるが基底状態の位相的秩序や Anyon が見えるという点で興味深い．Kitaev 模型のハミルトニアンに並進不変な摂動を加えてみる.

$$H(\lambda)=H_0+\lambda\sum_l \tau_l(Q) \tag{4.11}$$

ここで λ は実パラメータであり，Q は局所作用素，τ_l は格子上の並進である.

定理 4.7. *(4.11)* のスペクトルに関して次が成立する.
システムサイズ k によらない定数 $\lambda_0, c_1>0$ とある $0<\delta(k)<\lambda$ $\lim_{k\to\infty}\delta(k)=0$ をみたす $\delta(k)$ が存在し *(4.11)* のスペクトルは区間の和集合 $I=\bigcup_e I_e$ に含まれる.
ここで和集合は H_0 のスペクトル e 全体でとり，区間 I_e は
$I_e=[\ e(1-c_1\lambda)-\delta(k)\ ,\ e(1+c_1\lambda)+\delta(k)\ ]$ により定める.

この結果はハミルトニアンの繰り込みに類似のユニタリー変換と摂動理論を行い導かれる．　繰り込みに類似のユニタリー変換は時間に依存するハミルトニアンの時間発展を与えるユニタリー作用素の族として構成される．この時間発展を与えるユニタリー作用素に対して Lieb-Robinson bounds は証明でき，スペクトル解析に使うことができる.

位相的秩序の有無は entanglement entropy の漸近的振る舞いの第二項（topological entanglement entropy) によりは決まると考えられている．ギャップのある二次元系基底状態の entanglement entropy の面積則も証明できない現状では，位相的秩序の数学的な研究は今後の課題であると思われる.

5　物理量の揺らぎのなす代数

話を簡単にするため，$\mathcal{A}$ を一次元格子上の量子スピン系の代数とする（各格子点上の代数は全て $M_n(\mathbb{Z})$ とする: $\mathcal{A} = \otimes_{\mathbb{Z}} M_n(\mathbb{Z})$）．

$$\mathcal{F}_N(A) = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \left\{ \sum_{|k| \leq N} \pi_\varphi(\tau_k(A) - \varphi(A)1) \right\}, \tag{5.1}$$

とおく．$\lim_{N\to\infty} \mathcal{F}_N(A) = F(A)$ は物理量 A の空間的な揺らぎを表すと解釈することにする．$F(A)$ は通常の意味では収束しないが，並進不変状態 φ の相関関数が指数的減衰すれば確率論における中心極限定理と同じように極限分布を考えることが出来る．

次に二個の局所物理量 $A = A^* \in \mathcal{A}_{[-n,n]}$ と $B = B^* \in \mathcal{A}_{[-m,m]}$ の分布を同時に考えてみる:

$$\begin{aligned} & \lim_{N\to\infty} \ [\mathcal{F}_N(A), \mathcal{F}_N(B)] \\ = \quad & \lim_{N\to\infty} \ \frac{\sum_{|k|,|l| \leq N} \tau_k([\pi_\varphi(A), \pi_\varphi(\tau_{l-k}(B))])}{2N+1} \\ = \quad & \lim_{N\to\infty} \ \frac{\sum_{|k| \leq N} \tau_k([\pi_\varphi(A), (\sum_{l=-(n+m)}^{n+m} \pi_\varphi(\tau_l(B))]))}{2N+1}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

φ が因子状態であれば式 (5.2) の最後の表示により (5.2) は定数 $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi([A, \tau_k(B)])$ に収束する．仮に極限

$$F(A) = \lim_{N\to\infty} \ \mathcal{F}_N(A), \tag{5.3}$$

が存在すると仮定すると $F(A)$ は物理量 A の揺らぎの作用素であり形式的に

$$[\ F(A)\ ,\ F(B)\ ] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi([A, \tau_k(B)])1, \tag{5.4}$$

と書くことが出来る．以上の考察により揺らぎの作用素 $F(A)$ が生成する代数は CCR 代数である (CCR = Canonical Commutation Relation 正準交換関係）．

定理 5.1. (中心極限定理)

$\mathcal{A}$ の並進不変状態 φ に対して二点相関関数は一様指数的減衰すると仮定する．$A = A^* \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$，$\Lambda \subset \mathbb{Z}$ と実数 T に対して

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\Lambda(A) = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \left\{ \sum_{k \in \Lambda} (\tau_k(A) - \varphi(A)1) \right\}, \\ & W_\Lambda^{(T)}(A) = e^{iT\mathcal{F}_\Lambda(A)}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

とおくと任意の $A_1 = A_1^*, \cdots A_m = A_m^* \in \mathcal{A}_{\rm loc}$ について

$$\begin{aligned} & \lim_{L\to\infty} \varphi(W_{\Lambda_L}^{(T)}(A_1)W_{\Lambda_L}^{(T)}(A_2)\cdots W_{\Lambda_L}^{(T)}(A_m)) \\ = \quad & e^{-\frac{T^2}{2}t(\sum_{k=1}^m A_k,\sum_{k=1}^m A_k)}e^{-i\frac{T^2}{2}\sum_{1\le j<k\le m} s(A_j,A_k)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

が成立する．ただし

$$\begin{aligned} t(A,B) = & \quad \lim_{L\to\infty}\varphi(\mathcal{F}_{\Lambda_L}(A)\mathcal{F}_{\Lambda_L}(B)) \\ = & \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\left(\varphi(A\tau_k(B)) - \varphi(A)\varphi(B)\right), \\ s(A,B) = & \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi([A,\tau_k(B)]), \end{aligned}$$

である．

$$\mathcal{K} = \{Q = Q^* \in \mathcal{A}_{loc} \mid \varphi(Q) = 0\,\},$$

$$\gamma(Q,R) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varphi([Q,\tau_k(R)],$$

と定める．$Q \in \mathcal{K}$ に対して形式的な極限 $c\text{-}\lim$

$$c\text{-}\lim_L W_{\Lambda_L}^{(1)}(Q) = c\text{-}\lim_L e^{i\mathcal{F}_\Lambda(Q)} = W_{\rm clt}(Q)$$

を導入しする．$W_{\rm clt}(Q)W_{\rm clt}(R) = e^{\frac{1}{2}\gamma(Q,R)}W_{\rm clt}(Q+R)$ をみたすユニタリー $W_{\rm clt}(Q)$ が生成する Weyl CCR 代数を $\mathcal{W}_{\rm clt}$ と書くことにすると，(5.6) は

$$\varphi(W(Q)) = e^{-\frac{1}{2}t(Q,Q)}$$

により定まる $\mathcal{W}_{\rm clt}$ の準自由状態（ボーズ粒子系のガウス状態）を与えていることを意味する．

次に状態 φ が逆温度 β の平衡状態であり，二点相関関数が指数的に減衰すると仮定する．(相互作用が短距離型であれば指数的減衰は高温では成立）この時，揺らぎが定める CCR 代数の状態も平衡状態にあることを述べよう．

基底状態の定義の後に述べたが有限量子系で逆温度 β の平衡状態は定義 4.2 の KMS 状態である．そこで揺らぎが定める CCR 代数の状態は KMS 状態であれば，平衡状態であると理解することにする．

揺らぎが定める CCR 代数の時間発展を考えてみる．$\alpha_t(A)$ は局所的な物理量ではないので $W_\Lambda^{(T)}(\alpha_t(Q))$ に対して中心極限定理は直接は使えないが Lieb-Robinson Bounds により近似的な評価は可能である。揺らぎのなす CCR 代数の時間発展 $W_{\mathrm{clt}}(\alpha_t(Q))$ を定めることが出来る．

定理 5.2. もとの量子スピン系の状態 φ は α_t の β-*KMS* 状態であるとする．φ に対して中心極限定理が成立する時，得られる揺らぎの代数の状態は

$$\tilde{\alpha}_t(W_{\mathrm{clt}}(Q)) = W_{\mathrm{clt}}(\alpha_t(Q))$$

により定まる揺らぎの代数時間発展 $\tilde{\alpha}_t$ の *KMS* 状態である．

参考文献

Lieb-Robinson Bounds の参考文献としては
Bruno Nachtergaele, Robert Sims
Much Ado About Something: Why Lieb-Robinson bounds are useful (arXiv:1102.0835)
Lieb-Robinson Bounds in Quantum Many-Body Physics(arXiv:1004.2086)

作用素環的手法を使った量子統計力学の教科書として
O.Bratteli and D.Robinson,
Operator algebras and quantum statistical mechanics. Vols. 1 and 2. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997

非平衡系も視野にいれた本としては
S. Attal, A. Joye and C.-A. Pillet.
Open quantum systems, Lecture Notes in Mathematics, 1880-1882. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
がある．