物性研究・電子版 Vol. 4, No. 4, 044202（2015年11月号）

超流動とボース・アインシュタイン凝縮の長年の未解決な関係

東京大学総合文化研究科　加藤雄介

1　はじめに

抵抗なしに流体がマクロな流れを生じうるとき、その流体を超流体といい、その状態を超流動状態と呼ぶ。抵抗（粘性）は多数の自由度を持つマクロな系の動力学につきまとう不可逆過程で生じるものであるから、散逸がないマクロな流れ、すなわち超流動現象はなかなかに非自明、かつ魅力的な現象である。そのためか、「極低温」で実現する現象（ヘリウム４超流動の転移温度は常圧で 2.17K、冷却原子系超流動の温度は 10^{-7}K のオーダー）であるにも関わらず「熱い」論争が交わされてきた。1938 年以来長らくヘリウム４が（ボース・アインシュタイン凝縮系では）唯一の超流動状態であったが、この 20 年弱の間、冷却原子系超流動（1995）、エキシトンポラリトン系超流動 (2009) が見出されている。また理論的アプローチも従来の量子多体論的なものから最近では非線形物理の手法も用いられており、実現する物質系、理論的枠組みの両面において超流動の研究は分野横断的になりつつある。

本講義ではまず超流動現象について紹介した後、Landau、Leggett、Mueller らの理論を紹介していく。その中で、多くの人が抱くであろう疑問：

Q1. 超流動とボース・アインシュタイン凝縮、ゲージ対称性の破れの関係

Q2. 理想ボース気体は超流動体とみなすべきなのか？

Q3. 超流動の臨界速度では何が起きているのか

Q4. 固体は超流動を生じうるのか

これらについて参加者の皆さんと理解を深めていきたい。

[講義ノートの位置づけについて] 講義の前半はほぼテキストに沿って進めていくが、事前に目を通しておいてもらうと理解の助けになると思う。超流動性について考える上で大切なポイントは (i) 熱平衡状態で起こる現象と準安定状態で起こる現象を区別すること、(ii) ボース・アインシュタイン凝縮（位相の固さ）だけでなく密度の固さにも注目して超流動を把握することである。

2　熱平衡状態の超流動

この節では熱平衡状態における超流動「ヘス・フェアバンク効果（Hess Fairbank 効果）」について述べる。

[非古典的回転慣性] 肉厚の薄いほぼ円筒状の容器の中に物体を入れ、回転軸まわりに容器をゆっくりと一定の角速度で回転させる（図 1）。通常の流体でこのような実験をし、十分時間がたって熱平衡状態になったとすれば、流体全体は容器とともに回転するであろう。そのときの流体の慣性モーメントを $I_{\rm cl}$ とする（半径 R, 各粒子の質量 m, 全粒子数 N とすると $I_{\rm cl} = NmR^2$）。ある流体に対して同様の実験をしたとき、熱平衡状態に達した

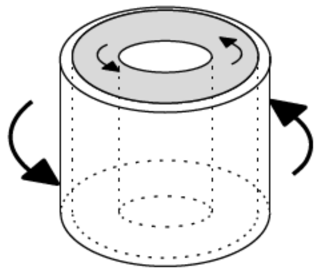

図 1: 熱平衡状態の超流動 (ヘス・フェアバンク効果)。容器がゆっくり回転するとき、流体の一部（超流動成分）は静止したままである。

と思える状況にもかかわらず、観測された角運動量の期待値 $L_z(\omega)$ と回転角速度 ω の比からもとめた慣性モーメント I が $I_{\rm cl}$ よりも小さかったとしよう。このとき、流体の一部は回転する容器に追随することなく実験室系から見て静止しているとみなすことができる。熱平衡状態でこれが実現しているから、流体の一部と容器がエネルギー散逸を生じず相対運動していることになり、この流体は超流動状態にあるとみなせる。$I < I_{\rm cl}$ となる性質は非古典的回転慣性 (non-classical rotational inertia) またはヘス・フェアバンク効果と呼ばれ、（熱平衡状態における）超流動性を特徴づける基本的な性質である。

[超流動の特徴、イメージ] 慣性モーメントが古典系と比べて小さくなり、慣性モーメントは回転運動に対する慣性を表すから、「軽くなる」のが超流動の特徴といえるのであろうか。実際、液体ヘリウムの超流動は I を測る実験（ねじり振り子の実験）ではねじりの弾性定数 K と I の比で決まる共鳴周波数 $(K/I)^{\frac{1}{2}}$ が高くなる変化をとらえて超流動相を同定している。しかしその軽さも、容器の回転についていかないことに由来するのであるから、容易になびかない「頑固さ」として超流動を特徴づけるほうがより適切かもしれない。

ただ超流動体は頑固一徹かというとそうでもない。図 2 は、角運動量の期待値 $L_z(\omega)$ を容器の回転角速度 ω の関数としてプロットしたものである。点線は古典流体、太い実線は絶対零度における超流動体の振る舞いを表す。細い実線は有限温度の超流動体の振る舞いを表す。絶対零度の超流動体でも、不均一ポテンシャルの影響が大きく、密度の空間変化が大きい場合には細い実線のような振る舞いをする。$\omega_0 = \hbar/(mR^2)$ が特徴的周波数を与える。L_z/ω を I とおいて慣性モーメントと呼んだが超流動性を持つ系では I も ω

に依存しうることに注意してほしい。図 2 の実線を見ると回転速度が十分ゆっくりな時

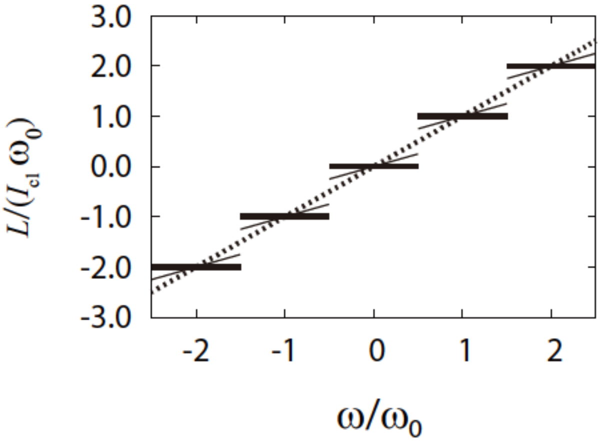

図 2: 角速度 ω で回転している容器中の流体の角運動量点線は古典流体、太い実線は絶対零度における超流動体の振る舞いを表す。細い実線は有限温度の超流動体の振る舞いを表す。

$(|\omega| < \omega_0/2)$、実線は点線の傾き $(= I_{\rm cl})$ に比べて小さく、たしかに前述の非古典的回転慣性を与えている。一方それより ω が大きくなると $\omega_0/2 < \omega < \omega_0$ では実線は点線の上側にあり、$I > I_{\rm cl}$ となり古典流体よりも超流動体の方が慣性モーメントが大きくなっている。ω が ω_0 のときは $I = I_{\rm cl}$ となり、それよりも ω が大きくなった場合には ω_0 を単位としてこのパターンを繰り返している。このように超流動体は、容器の回転速度によって部分的にしか追随しなかったり、過剰に反応したり（流れすぎてしまう）と「ぎこちない」応答を繰り返す。容器の回転に自然に追随する古典流体に比べて）、超流動体の特徴は、ぎこちなさあるいは「不器用さ」にあるといっていい。その不器用さは以下に見るように量子統計性と粒子間の長距離相関に由来する。

[超流動密度、ヘリシティーモデュラス] 超流動性を特徴づける量としては他にも超流動密度 $\rho_{\rm s}$ がある。$\rho_{\rm s}$ は、全質量密度を ρ、容器の回転の速さを ω としたとき、$\rho_{\rm s} = \rho \lim_{\omega\to 0}(I_{\rm cl} - I)/I_{\rm cl}$ で与えられる [3]。超流動密度は、超流動体の特徴をある種の固さ（rigidity）として表すヘリシティーモデュラスと関連付けることができる。このあたりの事情を以下数式を用いて述べていく。図 2 についてはこの章の最後に再び触れることにする。

[回転容器中の古典統計力学] ここまでの話はすべては熱平衡状態の話なので、超流動の問題も平衡統計力学で取り扱うことができる。超流動は古典統計からは導かれないことを以下示そう。

容器が円筒形からずれているとする（そうでないとどんな流体でも容器の回転に追随しないのは当たり前である。）実験室系からみるとポテンシャルが時間に依存することに注意する。容器とともに回転する座標系から見れば容器由来のポテンシャルは時間に依存しないものとなる。分配関数や各種物理量の熱平均値を計算するためには、系の力学的性質を正準形式（ハミルトニアン形式）で表す必要がある。容器とともに回転する座標系でのハミルトニアンがどのように与えられるかを見ていこう。まず質量 m の一粒子の場

合を考えよう。容器が静止しているとき実験室系からみた位置座標 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と運動量 $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ を用いて、ハミルトニアンが

$$\mathcal{H}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(x, y, z) \tag{1}$$

と表されるとする。容器が z 軸まわりに正の方向に一定の角速度 ω で回転するとき、(1) は

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t) = \mathcal{H}_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(X, Y, z) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{R} = (X, Y, z) \tag{3}$$

$$X = X(x, y, t) = x \cos \omega t + y \sin \omega t \tag{4}$$

$$Y = Y(x, y, t) = -x \sin \omega t + y \cos \omega t \tag{5}$$

となる。(2) から得られる正準方程式

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)/\partial \boldsymbol{r}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \partial \mathcal{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)/\partial \boldsymbol{p} \tag{6}$$

からは運動方程式

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial V}{\partial X}\cos \omega t + \frac{\partial V}{\partial Y}\sin \omega t \\
\dot{p}_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\left(\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial V}{\partial X}\sin \omega t - \frac{\partial V}{\partial Y}\cos \omega t \\
\dot{p}_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned} \tag{8}$$

が得られる。回転座標系のハミルトニアンで、これと同じ運動方程式を与えるのは

$$\mathcal{H}_0(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}) - \omega(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P})_z =: \mathcal{H}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}) \tag{9}$$

である。正準方程式

$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\partial \mathcal{H}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R})/\partial \boldsymbol{R}, \quad \dot{\boldsymbol{R}} = \partial \mathcal{H}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R})/\partial \boldsymbol{P} \tag{10}$$

と (5) より、(8) と

$$\boldsymbol{P} = m(\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t, -\dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t, \dot{z}) \tag{11}$$

が導かれる。(9) に現れる付加項の $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$ は回転座標系の角運動量と思ってしまいそうだが、$\boldsymbol{P} \neq m\dot{\boldsymbol{R}}$ であるため（左辺は canonical momentum、右辺は kinetic momentum という）そうではない。実際に (5) と (11) から

$$(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{12}$$

となるので、実験室系から見た角運動量である。

（静止した容器の下で）ハミルトニアンが

$$H_0(\{\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{r}_i\}) = \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + V(\{\boldsymbol{r}_i\}) \tag{13}$$

で与えられる多粒子系が一様回転する容器の中にあるときハミルトニアンは一粒子の場合と同様に

$$H_{\mathrm{rot}}(\{\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{R}_i\}) = H_0(\{\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{R}_i\}) - \omega \sum_i (\boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{P}_i)_z \tag{14}$$

で与えられる。ここで V は容器からの一体ポテンシャルと粒子間の 2 体相互作用（中心力ポテンシャル）を表す。このあとの便宜のため

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{rot}}(\{\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{R}_i\}) &= \sum_i \left[\frac{(\boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)^2}{2m} - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)^2 + V(\{\boldsymbol{R}_i\}) \right] \\ &= \sum_i \left[\underbrace{\frac{(\boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)^2}{2m}}_{\tilde{K}_i} + \underbrace{V(\{\boldsymbol{R}_i\}) - \frac{m\omega^2}{2}(X_i^2 + Y_i^2)}_{\tilde{V}_i} \right] \end{aligned} \tag{15}$$

とも表しておこう.

回転容器中の熱平衡状態の分配関数は

$$Z = \left(\prod_i \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_i \mathrm{d}\boldsymbol{R}_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \exp[-\beta H_{\mathrm{rot}}(\{\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{R}_i\})] \tag{16}$$

で与えられる（β は $(k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$ を表す）。物理量 $f(\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{P}_i\})$ の期待値は

$$\begin{aligned} &\langle f(\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{P}_i\}) \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \left(\prod_i \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_i \mathrm{d}\boldsymbol{R}_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{rot}}(\{\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{R}_i\})} f(\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{P}_i\}) \\ &= \frac{1}{Z} \left(\prod_i \int \mathrm{d}\boldsymbol{R}_i \right) \mathrm{e}^{-\beta \sum_i \tilde{V}_i} \left(\prod_i \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_i}{(2\pi\hbar)^3} \right) \mathrm{e}^{-\beta \sum_i \tilde{K}_i} f(\{\boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{P}_i\}) \end{aligned} \tag{17}$$

この表式から

$$\langle \boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i \rangle = 0 \tag{18}$$

となることがわかる。(18) は後述の (26) で用いる。(18) の左辺の表式は

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{P}_i \exp\left(-\frac{\beta(\boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i)^2}{2m} \right) (\boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i) \tag{19}$$

という因子を含む。$\boldsymbol{P}_i' = \boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_i$ と変数変換すると (19) は

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{P}_i' \exp\left(-\frac{\beta(\boldsymbol{P}_i')^2}{2m}\right)\boldsymbol{P}_i' \tag{20}$$

となり、被積分関数は $\boldsymbol{P}_i'$ の各成分について奇関数であるから (20) はゼロになる。

[古典統計では超流動は起こらない] 以下回転座標系から見た角運動量 ($\boldsymbol{L}_{\mathrm{rot}}$) の熱平均値がゼロであること（流体が容器に完全に追随すること）を示す。角運動量 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{rot}}$ が回転座標系での質量流 (mass flow)$\boldsymbol{j}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t)$ の一次のモーメント

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{rot}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{j}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t)) \tag{21}$$

である。回転座標系での質量流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t)$ は質量密度

$$\rho_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t) = m\sum_i \delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i) \tag{22}$$

と連続の方程式

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{j}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t) = 0 \tag{23}$$

を満たす。そのことと

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t} &= m\sum_i \frac{\partial\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i)}{\partial\boldsymbol{R}_i}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}_i \\ &= -m\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{R}}\cdot\sum_i \delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i)\frac{\partial H_{\mathrm{rot}}}{\partial\boldsymbol{P}_i}\end{aligned}$$

から回転座標系での質量流の表式として

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{rot}}(\boldsymbol{R},t) = \sum_i \delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_i)\,(\boldsymbol{P}_i - m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_i) \tag{24}$$

が得られる。(24) を (21) に代入し、

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{rot}} = \sum_i \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{P}_i - \sum_i \boldsymbol{R}_i \times (m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_i) \tag{25}$$

となる。右辺第一項は一粒子の時と同様、実験室系から見た角運動量である（これを $\boldsymbol{L}$ とおく）。(18) と (25) により

$$\langle \boldsymbol{L}_{\mathrm{rot}} \rangle = 0 \tag{26}$$

となる。また

$$\langle L_z \rangle = \langle \sum_i (\boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{P}_i)_z \rangle = \langle \sum_i (\boldsymbol{R}_i \times (m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_i))_z \rangle = \omega m \langle \sum_i (X_i^2 + Y_i^2) \rangle = \omega I_{\mathrm{cl}} \tag{27}$$

となる。(26) は回転座標系から見ると角運動量はゼロであり、(27）は実験室系では流体は容器の回転運動に完全に追随する運動状態にあることを示している。慣性モーメント $I_{\rm cl}$ はもともとのポテンシャル $V(\{\boldsymbol{R}_i\})$ に加えて、遠心力ポテンシャル $-m\omega^2\sum_i(X_i^2+Y_i^2)/2$ の下で角運動量の期待値をとって求める。容器の厚さ（外径と内径の差）が大きければ、慣性モーメントも ω が大きくなるに従い大きくなる。ただし容器の厚さが十分薄ければ $I_{\rm cl}=NmR^2$ としてよい。

[回転容器中の量子系の非古典的回転慣性と超流動密度] 回転容器中の量子系のハミルトニアンは (14) の $\{\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{P}_i\}$ を演算子とみなし正準交換関係

$$[\hat{\boldsymbol{R}}_i,\hat{\boldsymbol{P}}_j]=\mathrm{i}\hbar\delta_{ij} \tag{28}$$

を要請して得られたもの

$$\hat{H}_{\rm rot}=H_0(\{\hat{\boldsymbol{P}}_i,\hat{\boldsymbol{R}}_i\})-\omega\sum_i(\hat{\boldsymbol{R}}_i\times\hat{\boldsymbol{P}}_i)_z \tag{29}$$

で与えられる。量子系でも $\sum_i(\hat{\boldsymbol{R}}_i\times\hat{\boldsymbol{P}}_i)_z=:\hat{L}_z$ は実験室系から見た角運動量（の z 成分）を表す。時間に依存しないシュレーディンガー方程式

$$\hat{H}_{\rm rot}|\Psi_n\rangle=E_n(\omega)|\Psi_n\rangle \tag{30}$$

の固有値と、規格化された固有関数の状態ベクトルをそれぞれ $E_n(\omega)$、$|\Psi_n\rangle$ ($\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle=1$) とする（状態ベクトルも ω に依存することに注意)。$|\Psi_n\rangle$ での $\hat{L}_z$ の期待値は Feynman-Hellman の定理を用いると

$$\langle\Psi_n|\hat{L}_z|\Psi_n\rangle=-\langle\Psi_n|\frac{\partial\hat{H}_{\rm rot}}{\partial\omega}|\Psi_n\rangle=-\frac{\partial}{\partial\omega}\langle\Psi_n|\hat{H}_{\rm rot}|\Psi_n\rangle=-\frac{\partial E_n(\omega)}{\partial\omega} \tag{31}$$

となる。$\hat{L}_z$ の熱平均値は分配関数 $Z(\omega)$ や自由エネルギー $F(\omega)$

$$Z(\omega)=\mathrm{e}^{-\beta F(\omega)}=\sum_n\mathrm{e}^{-\beta E_n(\omega)} \tag{32}$$

を用いて

$$\begin{aligned}\langle\hat{L}_z\rangle &= \frac{1}{Z(\omega)}\sum_n\langle\Psi_n|\hat{L}_z|\Psi_n\rangle\mathrm{e}^{-\beta E_n(\omega)} &(33)\\ &= -\frac{1}{Z(\omega)}\sum_n\frac{\partial E_n(\omega)}{\partial\omega}\mathrm{e}^{-\beta E_n(\omega)} &(34)\\ &= -\frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega} &(35)\end{aligned}$$

と表される。慣性モーメントは

$$I=-\frac{1}{\omega}\frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega} \tag{36}$$

と表され、超流動密度は

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{\rm s}}{\rho} &= \lim_{\omega\to 0}\frac{I_{\rm cl}(\omega)-I(\omega)}{I_{\rm cl}(\omega)} \\ &= 1+\frac{1}{I_{\rm cl}(0)}\frac{\partial^2 F(\omega)}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega\to 0}\end{aligned} \tag{37}$$

と与えられる。右辺第二項は負の値をとる。ω と同符号の角運動量 L_z を取ればそれだけ自由エネルギーが下がるからである。系が容器の回転に対してあまりになびき易いと、この項と右辺第一項が打ち消しあい小さくなる、またはゼロになる。したがって右辺第二項の絶対値が小さければ小さいほど超流動性が強い。本稿冒頭で述べたように回転が加わろうと系の状態が変わらない「頑固さ」が超流動の特徴である。

[超流動密度とヘリシティーモデュラス] その頑固さを別の形で表現しよう。容器の肉厚を薄くし、各粒子の位置座標は円筒座標における（xy 面内の) 角度座標 θ と z 座標の組 $\{\theta_i, z_i\}$ で指定されるとする。さらに話を単純にするために z 座標を無視する (ほぼリング状の容器を考えることに相当)。このときハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\rm rot} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{(\hat{\ell}_i)^2}{2mR^2}+V}_{\hat{H}_0} -\omega\sum_{i=1}^{N}\hat{\ell}_i \tag{38}$$

$$= \frac{1}{2mR^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\ell}_i-\hbar\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+V-\frac{I_{\rm cl}\omega^2}{2} \tag{39}$$

$$= \frac{1}{2mR^2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hbar}{\rm i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}-\hbar\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+V-\frac{I_{\rm cl}\omega^2}{2} \tag{40}$$

と表される。最右辺の式は $\hat{\ell}_i\to\frac{\hbar}{\rm i}\frac{\partial}{\partial\theta_i}$ として波動関数 $\Psi(\{\theta_i\})$ への作用を表している。

このハミルトニアンの固有波動関数 $\Psi_n(\{\theta_i\})$ は周期的境界条件

$$\Psi_n(\theta_1,\cdots\theta_i+2\pi,\cdots,\theta_N)=\Psi_n(\theta_1,\cdots\theta_i,\cdots,\theta_N) \tag{41}$$

の下でシュレーディンガー方程式

$$\hat{H}_{\rm rot}\Psi_n(\{\theta_i\})=E_n(\omega)\Psi_n(\{\theta_i\}) \tag{42}$$

を満たす。これに対して位相変換を施した波動関数

$$\Psi'_n(\{\theta_i\})=\exp\left[-{\rm i}\frac{\omega}{\omega_0}\sum_{i=1}^{N}\theta_i\right]\Psi_n(\{\theta_i\}) \tag{43}$$

は位相因子がかかった周期的境界条件

$$\Psi'_n(\theta_1,\cdots\theta_i+2\pi,\cdots,\theta_N)=\exp\left[-{\rm i}2\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right]\Psi'_n(\theta_1,\cdots\theta_i,\cdots,\theta_N) \tag{44}$$

の下でシュレーディンガー方程式

$$\hat{H}_0\Psi'_n(\{\theta_i\}) = \underbrace{\left(E_n(\omega) + \frac{I_{\rm cl}\omega^2}{2}\right)}_{=:E'_n(\omega)}\Psi'_n(\{\theta_i\}) \tag{45}$$

を満たす。$\Psi'_n(\{\theta_i\})$ はハミルトニアンは容器が静止しているときと同じままで、境界条件だけをひねった場合の固有関数になっている。これに対応する自由エネルギー

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= -\frac{1}{\beta}\ln\sum_n \mathrm{e}^{-\beta E'_n(\omega)} \\ &= -\frac{1}{\beta}\ln\sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n(\omega)-\beta I_{\rm cl}\omega^2/2} \\ &= F(\omega) + \frac{I_{\rm cl}\omega^2}{2} \end{aligned} \tag{46}$$

を導入すると超流動密度の表式 (37) は

$$\frac{\rho_{\rm s}}{\rho} = \frac{1}{I_{\rm cl}(0)}\frac{\partial^2 F'(\omega)}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega\to 0} \tag{47}$$

とも表すことができる。この表式から超流動密度が波動関数の位相の境界条件の変化に対してどのくらいエネルギーが上がるか、その程度を表することがわかる。

系の境界条件をひねったときのエネルギー変化は秩序化した系の固さ (rigidity) を表す指標として他の物理系でも用いられる。例えば、固体（並進対称性が破れた系）では変位の境界条件を変化させることで弾性エネルギーが上昇する。強磁性体（スピン空間対称性が破れた系）でもスピンの境界条件を変化させることで交換相互作用のエネルギーが上昇する。

超流動体の場合この固さは「ヘリシティーモデュラス」(helicity modulus) と呼ばれる物理量 γ で表されることも多い。ヘリシティーモデュラスと超流動密度 $\rho_{\rm s}$ の関係は、

$$\rho_{\rm s} = \frac{m^2\gamma}{\hbar^2} \tag{48}$$

で与えられる [4]。超流動における位相相関の固さの起源について考えると、ボース・アインシュタイン凝縮によって出現する巨視的波動関数の位相をひねればエネルギーは上昇するであろうと考えられる。実際、空間的に一様な（不均一なポテンシャルを与える散乱体もなく、境界条件もある方向には位相ひねりの入った周期的境界条件、それ以外の方向については周期的境界条件を満たす）理想ボース気体ではボース・アインシュタイン凝縮温度以下で超流動密度が凝縮体密度に比例するという結果が得られる。このようにして「ボース・アインシュタイン凝縮が起これば超流動が生じる」と理解されている。相互作用する粒子からなる超流動体でも $\rho_{\rm s}/\rho$ が有限に残る系も温度とともに減少し $T = T_{\rm c}$（超流動転移温度）でゼロとなり、ポテンシャルの効果が十分小さく粒子分布がほぼ一様とみなせる超流動体では絶対零度で $\rho_{\rm s}/\rho = 1$ となると考えられている。ただし境界条件によ

り、あるいは強い斥力ポテンシャルにより、ある箇所で局所的に密度が小さくなる場合には絶対零度でも $\rho_{\mathrm{s}}/\rho < 1$ となる。以下では超流動密度と粒子密度の不均一性の関係を変分波動関数を用いて見ていこう。
[超流動を下支える固さ] $T=0$ で考えると自由エネルギー $F'(\omega)$ は基底状態のエネルギー $E'_{\mathrm{g}}(\omega)$ となり、(47) も

$$\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho} = \frac{1}{I_{\mathrm{cl}}(0)}\frac{\partial^2 E'_{\mathrm{g}}(\omega)}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega\to 0} \tag{49}$$

となる。境界条件 (44) を満たす試行波動関数 $\Psi'_{\mathrm{trial}}(\{\theta_i\})$ のエネルギー期待値を

$$\langle\Psi'_{\mathrm{trial}}|\hat{H}_0|\Psi'_{\mathrm{trial}}\rangle =: E'_{\mathrm{trial}}(\omega) \tag{50}$$

とおく。

$$E'_{\mathrm{trial}}(0) = E'_{\mathrm{g}}(0) \tag{51}$$

が成り立つとき、これと

$$E'_{\mathrm{trial}}(\omega) \geq E'_{\mathrm{g}}(\omega) \tag{52}$$

と、$E'_{\mathrm{trial}}(\omega)$ $E'_{\mathrm{g}}(\omega)$ がともに偶関数であることにより、

$$\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho} \leq \frac{1}{I_{\mathrm{cl}}(0)}\frac{\partial^2 E'_{\mathrm{trial}}(\omega)}{\partial\omega^2}\Big|_{\omega\to 0} \tag{53}$$

となり、ρ_{s} の上限を与える式が得られる。以下では試行関数を用いてこの右辺を評価しよう。$\Psi_0(\{\theta_i\})$ を周期的境界条件を満たす実関数であるとしそのエネルギー期待値を E_0 とする。これを用いて試行関数として

$$\Psi'_{\mathrm{trial}}(\{\theta_i\};\omega) = \Psi_0(\{\theta_i\})\exp\left[\mathrm{i}\sum_{i=1}^{N}\varphi(\theta_i;\omega)\right] \tag{54}$$

とおき、境界条件

$$\varphi(\theta+2\pi;\omega,n) = \varphi(\theta;\omega,n) - \frac{2\pi\omega}{\omega_0} + 2\pi n \tag{55}$$

（n は整数）の下でエネルギー期待値 $E'_{\mathrm{trial}}(\omega)$ が最小になるように φ の関数形と整数 n の値を最適化する。(54) のエネルギー期待値は

$$E'_{\mathrm{trial}}(\omega) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2mR^2}\Big\langle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi(\theta_i;\omega)}{\partial\theta_i}\right)^2\Big\rangle_0 \tag{56}$$

とかける。$\langle\cdots\rangle_0$ は $\Psi_0(\{\theta_i\})$ における期待値を表す。(56) を補助的なダミー変数 θ を用いて

$$E'_{\mathrm{trial}}(\omega) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2mR^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\Big\langle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\varphi(\theta;\omega)}{\partial\theta}\right)^2\delta(\theta-\theta_i)\Big\rangle_0 \tag{57}$$

と書く。(57) で θ 積分を実行すれば (56) に戻る。この手の変形は慣れないと違和感があるかもしれないが、常套手段の一つでしばしば用いられるものである。θ_i によらない部分は $\langle\cdots\rangle_0$ の外側に出すことができるから

$$E'_{\mathrm{trial}}(\omega) \;=\; E_0+\frac{\hbar^2}{2mR^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\quad\left(\frac{\partial\varphi(\theta;\omega)}{\partial\theta}\right)^2\underbrace{\left\langle\sum_{i=1}^{N}\delta(\theta-\theta_i)\right\rangle_0}_{\rho_0(\theta)} \tag{58}$$

と書き直せる。$\rho_0(\theta)$ は $\Psi_0(\{\theta_i\})$ における粒子の位置分布を表す。このエネルギー期待値を φ についての汎関数とみなして、それに停留条件を課して得られる式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho_0(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0 \tag{59}$$

より

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{C}{\rho_0(\theta)} \tag{60}$$

（C は積分定数）が導かれる。境界条件 (55) から C が決まり、

$$\varphi(\theta)=2\pi\left(n-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\rho_0(\theta)}\right)^{-1}\int_0^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta'}{\rho_0(\theta')} \tag{61}$$

と

$$E'_{\mathrm{trial}}(\omega) \;=\; E_0+\frac{2\pi^2\hbar(\omega-n\omega_0)^2}{\omega_0}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\rho_0(\theta)}\right)^{-1} \tag{62}$$

このエネルギーを最小にするように Ψ_0 と n を決める。与えられた ω に対して n は $|\omega-n\omega_0|$ が最小になるように決める。その結果得られる $E'_{\mathrm{trial}}(\omega)$ は ω について周期 ω_0 を持つ関数となる。その典型例を図 3 に示す。

さて超流動密度は $|\omega|\ll\omega_0$ の場合を考えればいいので $n=0$ とする。(62) において (51) が成り立つので、(53) より

$$\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho}\leq\frac{4\pi^2}{N}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\rho_0(\theta)}\right)^{-1} \tag{63}$$

が得られる。ここで $I_{\mathrm{cl}}(0)=NmR^2$ と $\omega_0=\hbar/(mR^2)$ を用いた。粒子分布が空間的に一様であるとき $\rho_0(\theta)=N/(2\pi)$ であり、その場合は (63) は

$$\frac{\rho_{\mathrm{s}}}{\rho}\leq 1 \tag{64}$$

となり、ほぼ自明な式となる。もし粒子分布に空間不均一性がありある個所での粒子密度が小さくなるとその部分が積分

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\rho_0(\theta)}$$

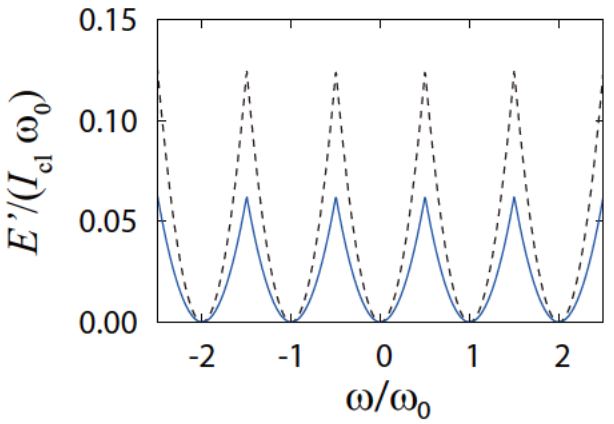

図 3: E' の ω 依存性。実線の方が点線より ρ_s が小さい場合を表す。

を大きく、(63) の右辺を小さくするのに寄与する。そのため絶対零度においても $\rho_s < \rho$ となる。これは超固体相（supersolid）のように自発的に並進対称性を破る場合、超流動液体相においても容器からのポテンシャルの効果で空間不均一性が生じる場合に起きる。超流動性を保つには密度分布をなるべく一様に保つ性質、すなわち位相の固さだけでなく密度の固さも必要であることを示している。

密度の固さの程度を与えるのが圧縮率 (compressibility) である。といっても有限の圧縮率があれば、ポテンシャルが弱ければ、それだけ密度のへこみも小さい。ボース系の場合、圧縮率は相互作用が強ければ小さくなる。その前提があるからボース粒子系でへリシティーモデュラスが計算されているのはほとんどの場合、不均一なポテンシャルをもたらす散乱体がないバルクの系であることが多い。一方互いに相互作用しない理想ボース気体では事情が異なる。理想ボース気体の圧縮率は無限大なので、ごく弱い空間不均一性があるだけで、巨視的波動関数も大きく変化する。超流動性を与えるのは位相の固さとそれを下から支える密度の固さである [2]。

ここで宿題となっていた図 2 について、先の変分エネルギーを用いて説明しておこう。実験室系から見た角運動量は

$$\langle L_z \rangle = I_{\mathrm{cl}}\omega - \frac{\partial E'_{\mathrm{trial}}(\omega)}{\partial \omega} \tag{65}$$

$$= I_{\mathrm{cl}}\omega - \frac{4\pi^2\hbar(\omega - n\omega_0)}{\omega_0}\left(\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\rho_0(\theta)}\right)^{-1} \tag{66}$$

となる。右辺第一項が古典統計の時の結果で、そこからのずれを表す第二項は周期 ω_0 の三角波のようなグラフになり、それらを足し合わせると図 2 のようなグラフになる。

3　液体ヘリウム ^{4}He と超流動

前節までは純理論的に超流動性（Hess-Fairbank 効果）を議論してきたが現実の系における Hess-Fairbank 効果はどのように理論的にどのように理解できるのだろうか。それらについてこの節で述べることにしよう。

[^{4}He の励起スペクトルと中性子散乱]

^{4}He の励起状態の性質は中性子散乱の実験によって明らかになった。中性子散乱の実験において、中性子が始状態から終状態に散乱される強度は動的構造因子 $S(\boldsymbol{q},\omega)$ に比例する。絶対零度において $S(\boldsymbol{q},\omega)$ は

$$S(\boldsymbol{q},\omega)=\sum_{\ell}|\langle\ell|\hat{\rho}_{\mathrm{q}}|\mathrm{g}\rangle|^2\delta(\omega-E_{\ell}+E_{\mathrm{g}}) \tag{67}$$

と表される。ここで $\langle\ell|$ は励起状態 ℓ の状態ベクトル（ブラベクトル）を表し、そのエネルギー固有値を E_ℓ とした。$|\mathrm{g}\rangle$ は基底状態 ℓ の状態ベクトル（ケットベクトル）を表し、そのエネルギー固有値を E_{g} と表した。$\hat{\rho}_{\boldsymbol{q}}$ は粒子数密度のフーリエ変換であり、$\sum_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ を表す。(67) を見るとわかるように、散乱強度がゼロでないとき ω の励起エネルギーを持ち、全運動量が $\boldsymbol{q}$ である状態が存在することを示している。図 4 は ^{4}He の中性子散乱の結果の模式図である。

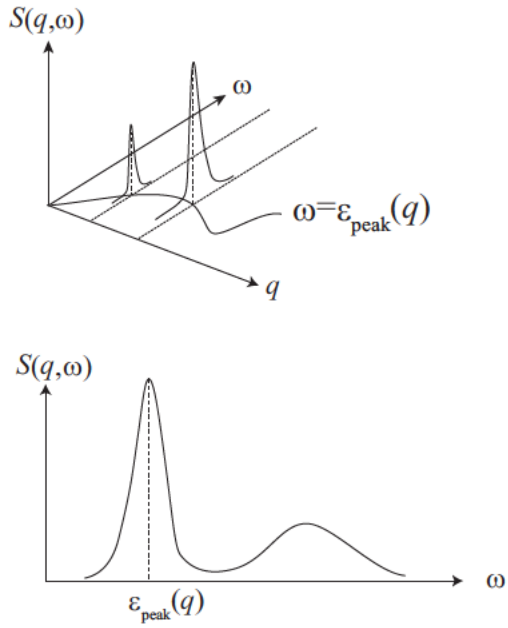

図 4: ^{4}He の動的構造因子 $S(q,\omega)$ の模式図. 上図は $\omega-q$ 平面における $S(q,\omega)$. 下図は q を固定したときの $S(q,\omega)$ の ω 依存性。

波数 $\boldsymbol{q}$ を固定して、ω の関数として $S(\boldsymbol{q},\omega)$ をプロットすると、低周波数側に鋭いピークがあり、高周波数側になだらかなピークがある。鋭いピークの位置は $\boldsymbol{q}$ の方向によらずその大きさ $q=|\boldsymbol{q}|$ のみに依存する。そのピーク位置を与える周波数を $\varepsilon(q)$ としてその q 依存性を模式的に表したのが、図 5 である。散乱強度に幅の狭いピーク

構造が現れると、寿命の長い素励起があるとみなせる。長波長では $\varepsilon_{\mathrm{peak}}(q) \propto q$ となり、この領域をフォノン領域という。それよりも短波長で見られる $\varepsilon_{\mathrm{peak}}(q)$ の極小付近の波数領域をロトン領域という。フォノン領域は音波に相当し、ロトン領域は、平均粒子間距離程度の波長を持つ密度揺らぎを表す。動的構造因子を ω について積分したもの

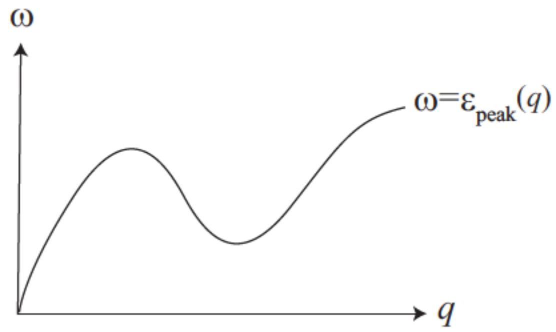

図 5: 低周波側の鋭いピークの位置 $\omega = \varepsilon_{\mathrm{peak}}(q)$ の模式図

$$S(q) = \frac{1}{N}\int_0^\infty S(q,\omega)\mathrm{d}\omega \tag{68}$$

を静的構造因子という。積分量であるので動的構造因子より測定値の精度が得やすいという特徴がある。

[Feynman の単一モード近似]

Feynman は $\omega = \epsilon(q)$ を中心とする鋭いピークが与えられた $\boldsymbol{q}$ に対する全強度をほぼ尽くしているのであれば、

$$\hat{\rho}_{\boldsymbol{q}}|\mathrm{g}\rangle \equiv |\Phi_{\boldsymbol{q}}\rangle \tag{69}$$

はほぼエネルギー固有状態と見做せ、その状態のエネルギー期待値 $\varepsilon_{\mathrm{sg}}(\boldsymbol{q})$ が励起スペクトルを与えると考えた。$\varepsilon_{\mathrm{sg}}(\boldsymbol{q})$ は

$$\varepsilon_{\mathrm{sg}}(\boldsymbol{q}) = \frac{q^2}{2mS(q)} \tag{70}$$

で与えられることを示し、実験で得られた静的構造因子 $S(q)$ から (70) を用いて励起スペクトルを求めた。相互作用するボース多体系の励起エネルギーは直接理論計算（数値計算）するのは難しい。その難しさをうまく回避して望みの物理量を得てしまうところが Feynman 理論の際立った特長である。与えられた波数 q を持つ励起状態が、(69) 以外にはないのであれば、この扱いが厳密となる。$\varepsilon_{\mathrm{sg}}(\boldsymbol{q}) \sim \varepsilon_{\mathrm{peak}}(\boldsymbol{q})$ となる系では厳密ではないが良い近似となる。^{4}He では q が小さいところで良い近似となっている。

[^{4}He の超流動性を導く]

Feynman 理論を用いて ^{4}He で Hess-Fairbank 効果が起きることを示そう。

ここでの議論は ^{4}He の超流動性を理論的に導く議論のうち簡潔なものの一つだと思う。

線形応答理論で応答量として粒子流密度

$$\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sum_j \left(\hat{\boldsymbol{v}}_j\delta(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}}_j) + \delta(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}}_j)\hat{\boldsymbol{v}}_j\right) \tag{71}$$

摂動ハミルトニアンとして

$$\mathcal{H}' = -\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_j \hat{\boldsymbol{r}}_j\times\hat{\boldsymbol{p}}_j = -\sum_j \hat{\boldsymbol{p}}_j\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{r}}_j) \tag{72}$$

をとる。最右辺の $\boldsymbol{\omega}\times\hat{\boldsymbol{r}}_j$ を $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}_j)$ と置くと

$$\mathcal{H}' = -\sum_j \hat{\boldsymbol{p}}_j\cdot\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}_j) = -\frac{1}{2}\sum_j \left(\hat{\boldsymbol{p}}_j\cdot\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}_j)+\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}_j)\cdot\hat{\boldsymbol{p}}_j\right) \tag{73}$$

となる。二つ目の等号では $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ により $\hat{\boldsymbol{p}}_j$ と $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{r}}_j)$ が可換であることを用いた。さらに (71) を用いて

$$\mathcal{H}' = -m\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{74}$$

とも表される。ここでは並進対称な系を考えているのでフーリエ変換

$$\hat{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{q}}\hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}},\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{75}$$

(Ω は体積を表す) を用いて、

$$\mathcal{H}' = -m\sum_{\boldsymbol{q}}\hat{\boldsymbol{j}}(-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \tag{76}$$

と表しておくと後の計算を見通し良く実行できる。

非摂動ハミルトニアン $\mathcal{H}_0$ に摂動ハミルトニアンを加えたときの基底状態における粒子流密度の $\mu(=x,y,z)$ 成分の期待値を

$$j_\mu(\boldsymbol{q}) \equiv \langle \hat{j}_\mu(\boldsymbol{q})\rangle \tag{77}$$

と表す。応答量 $j_\mu(\boldsymbol{q})$ と外場 $A_\nu(\boldsymbol{q})$ の線形関係を

$$j_\mu(\boldsymbol{q}) = -mQ^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q})A_\nu(\boldsymbol{q}),\quad \mu,\nu=x,y,z \tag{78}$$

と表すときの係数 $Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$ は応答関数と呼ばれる。線形応答理論によるとそれは遅延グリーン関数

$$Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) \equiv -\mathrm{i}\int_0^\infty \langle\mathrm{g}|\left[\hat{j}_\mu(\boldsymbol{q},t),\hat{j}_\nu(-\boldsymbol{q})\right]|\mathrm{g}\rangle\mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t \tag{79}$$

で与えられる。ここでの $|\mathrm{g}\rangle$ は摂動ハミルトニアンをゼロとした場合の基底状態の状態ベクトルを表す。$\hat{j}_\mu(\boldsymbol{q},t)$ はハイゼンベルグ表示

$$\hat{j}_\mu(\boldsymbol{q},t) = \exp(\mathrm{i}\mathcal{H}_0 t)\hat{j}_\mu(\boldsymbol{q})\exp(-\mathrm{i}\mathcal{H}_0 t) \tag{80}$$

を表す。δ は微小かつ正の実数で、$t=\infty$ までの積分を収束させるための因子（収束因子）である。

系が摂動ハミルトニアンがゼロであるときに系が等方的であるとすると、$Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$ のテンソル依存性が $\delta_{\mu\nu}$ と $q_\mu q_\nu$ あるいはそれらの線形結合になる。そこで

$$Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} Q_{\mathrm{L}}(q) + \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) Q_{\mathrm{T}}(q) \tag{81}$$

ここでの添え字 L,T はそれぞれ縦応答 (longitudinal)、横応答 (transverse) を表す。縦応答は外場がスカラー場の勾配で表される場合の応答を意味し、横応答は外場がベクトル場の回転 (rotation) で表される場合の応答を意味する。ここでは $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ であるので、$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ より、$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = q_\nu A_\nu(\boldsymbol{q}) = 0$ となる。これより

$$Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) A_\nu(\boldsymbol{q}) = Q_{\mathrm{T}}(q) A_\mu(\boldsymbol{q}), \tag{82}$$

したがって

$$\boldsymbol{j}_\mu(\boldsymbol{q}) = -m Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \tag{83}$$

となる。

以下示すのは Feynman の単一モード近似を用いて $Q_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) = 0$ となることである。これは、「外場（回転）をかけても流れが生じない」ことを意味するから、Hess-Fairbank 効果そのものである。

そのために $Q_{\mathrm{T}}(q)$ の表式を書き換える。

$$\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{q} = 0, \quad \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\eta}_{-\boldsymbol{q}} \quad |\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}}| = 1 \tag{84}$$

となる実単位ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}}$ を導入する。これを用いると

$$Q^{\mathrm{R}}_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) (\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}})_\mu (\boldsymbol{\eta}_{-\boldsymbol{q}})_\nu = Q_{\mathrm{T}}(q) \tag{85}$$

となる。ここで $\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{q}, t)$、$\hat{j}_{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\eta}_{-\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}(-\boldsymbol{q})$ とおき、便宜上 transverse current と呼ぶ（超伝導であれば「横電流密度」と呼びたいところであるが、中性原子の超流動の場合そうもいかない。とはいえ横粒子流密度というのはしっくりこないので、英語名で呼ぶことにする)。(85) から

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{T}}(q) &= -\mathrm{i} \int_0^\infty \langle \mathrm{g} | \left[\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}, t), \hat{j}_{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{q}) \right] | \mathrm{g} \rangle \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}t & (86)\\
&= -\mathrm{i} \sum_\ell \int_0^\infty \langle \mathrm{g} | \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}, t) | \ell \rangle \langle \ell | \hat{j}_{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{q}) | \mathrm{g} \rangle \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}t & (87)\\
&\quad + \mathrm{i} \sum_\ell \int_0^\infty \langle \mathrm{g} | \hat{j}_{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{q}) | \ell \rangle \langle \ell | \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}, t) | \mathrm{g} \rangle \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{d}t & (88)\\
&= -\sum_\ell \left\{ \frac{|\langle \ell | \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) | \mathrm{g} \rangle|^2}{E_\ell - E_{\mathrm{g}}} + (\boldsymbol{q} \leftrightarrow -\boldsymbol{q}) \right\} & (89)
\end{aligned}$$

を得る。ここで ℓ についての和は励起状態についてとるものとする。$\{\cdots\}$ の第二項は、第一項の $\boldsymbol{q}$ を $-\boldsymbol{q}$ におきかえたものである。

系は等方的であり、基底状態は空間反転について不変であるとき, 単一モード近似の下では (89) の分子の行列要素はゼロとなる、すなわち

$$\langle \Phi_{\boldsymbol{q}} | \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) | \mathrm{g} \rangle = 0 \tag{90}$$

が成り立つことを以下示そう。(90) は単一モード近似が成り立つならば Hess-Fairbank 効果が起きることを意味している。

(90) の導出

z 軸の正の向きを $\boldsymbol{q}$ の向きにとり、x 軸の正の向きを $\eta_{\boldsymbol{q}}$ にとっても以下の議論の一般性は失われない。$(x,y,z) \to (-x,y,z)$ とする鏡映演算子 $\hat{R}_x$ を次の関係式を満たすものとして導入する

$$\hat{R}_x^2 = 1, \quad \hat{R}_x|0\rangle = |0\rangle, \quad \hat{R}_x \hat{a}_{\boldsymbol{k}} \hat{R}_x = \hat{a}_{\bar{\boldsymbol{k}}}, \quad \hat{R}_x \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{R}_x = \hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}}. \tag{91}$$

ここで $|0\rangle$ は真空ベクトルを表し任意の波数 $\boldsymbol{k}$ について $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0$ が成り立つ。また $\bar{\boldsymbol{k}} = (-k_x, k_y, k_z)$ とする。基底状態が空間反転について不変であることから、

$$\hat{R}_x|\mathrm{g}\rangle = |\mathrm{g}\rangle \tag{92}$$

となる。(91) から得られる $\hat{R}_x$ の性質として

$$\hat{R}_x \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \hat{R}_x = \hat{a}_{\bar{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{q}} \tag{93}$$

$$\hat{R}_x \hat{\rho}_{\boldsymbol{q}} \hat{R}_x = \hat{\rho}_{\boldsymbol{q}} \tag{94}$$

$$\hat{R}_x \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \hat{R}_x = -\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \tag{95}$$

がある。(93) はほぼ明らかで、これから (94) も

$$\hat{R}_x \hat{\rho}_{\boldsymbol{q}} \hat{R}_x = \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\hat{R}_x \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{R}_x \right) \left(\hat{R}_x \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \hat{R}_x \right) = \sum_{\bar{\boldsymbol{k}}} \hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}} \hat{a}_{\bar{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{q}} = \hat{\rho}_{\boldsymbol{q}} \tag{96}$$

となる。(95) を示すには、まず $\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})$ の表式が

$$\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{q}}{2} \right) \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{k} \right) \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\boldsymbol{k}} k_x \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}} \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \tag{97}$$

と書き換えられることに注意する。これを用いて

$$\hat{R}_x \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \hat{R}_x = \sum_{\bar{\boldsymbol{k}}} k_x \hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}} \hat{a}_{\bar{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{q}} = \sum_{\bar{\boldsymbol{k}}} (-\bar{k}_x) \hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}} \hat{a}_{\bar{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{q}} = -\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \tag{98}$$

となる。(94),(95) はそれぞれ、$\hat{\rho}_{\boldsymbol{q}}$, $\hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})$ が R_x について偶、奇であることを示している。これらから

$$\hat{R}_x \hat{\rho}^\dagger_{\boldsymbol{q}} \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \hat{R}_x = -\hat{\rho}^\dagger_{\boldsymbol{q}} \hat{j}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \tag{99}$$

すなわち $\hat{\rho}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})$ が R_x について奇であることがわかる。これより

$$
\begin{aligned}
&\langle\Phi_{\boldsymbol{q}}|\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})|{\rm g}\rangle\\
&=\langle{\rm g}|\rho^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})|{\rm g}\rangle\\
&=\langle{\rm g}|R_x^2\rho^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})R_x^2|{\rm g}\rangle\\
&=\underbrace{\langle{\rm g}|R_x}_{\langle{\rm g}|}\underbrace{R_x\rho^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})R_x}_{-\rho^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})}\underbrace{R_x|{\rm g}\rangle}_{|{\rm g}\rangle}=-\langle\Phi_{\boldsymbol{q}}|\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})|{\rm g}\rangle
\end{aligned}
\tag{100}
$$

が得られ、(90) が導かれる。

ここでのポイントは $\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})$ は運動量を $-\boldsymbol{q}$ だけ変化させ、R_x についての偶奇性を変える演算子であるために、運動量は $-\boldsymbol{q}$ であるが R_x について偶である励起状態 $|\Phi_{\boldsymbol{q}}\rangle$ は、基底状態とは行列要素を持たないという点にある。

(92) が基底状態が成り立つことはたとえば Leggett の試行関数 [7]

$$
|{\rm g}\rangle=\left((\hat{a}_0^\dagger)^2+\sum_{\boldsymbol{k}(\neq 0)}f_{|\boldsymbol{k}|}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\right)^{N/2}|0\rangle \tag{101}
$$

を見るとわかる。実際

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_x|{\rm g}\rangle &= \hat{R}_x\left((\hat{a}_0^\dagger)^2+\sum_{\boldsymbol{k}(\neq 0)}f_{|\boldsymbol{k}|}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{k}}\right)^{N/2}\hat{R}_x^2|0\rangle &(102)\\
&= \left((\hat{a}_0^\dagger)^2+\sum_{\boldsymbol{k}(\neq 0)}f_{|\boldsymbol{k}|}\hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}}\hat{a}^\dagger_{-\bar{\boldsymbol{k}}}\right)^{N/2}|0\rangle &(103)\\
&= \left((\hat{a}_0^\dagger)^2+\sum_{\bar{\boldsymbol{k}}(\neq 0)}f_{|\bar{\boldsymbol{k}}|}\hat{a}^\dagger_{\bar{\boldsymbol{k}}}\hat{a}^\dagger_{-\bar{\boldsymbol{k}}}\right)^{N/2}|0\rangle=|{\rm g}\rangle &(104)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

ここでの議論は流体をバルクとみて、その線形応答特性から超流動性の有無を判定している。Hess-Fairbank 効果を見るには回転容器に入れられた流体の特性を調べる必要がある。ここでの議論が妥当性を持つのは系の応答特性が、形状や境界条件に依らないことが前提となる。たいていの場合はその前提は成り立つが、圧縮率が無限大となる自由ボースガスや一次元の朝永ラッティンジャー液体の電荷密度相の場合は成り立たない。

ここでの議論において超流動性にボース・アインシュタイン凝縮はどのように効いているのかははっきりしない。ここでのポイントは transverse current $\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})$ について基底状態との間に行列要素を持つ励起状態がないことがポイントであった。単一モード近似では、実験結果から長波長の励起は密度励起に限るという仮定から出発したのだが、そのように励起状態を制限するところに BEC が関与しているのだろうか。また粒子数確定の状態で Hess-Fairbank 効果が起きる。したがって、ゲージ対称性の破れという語の意味をさ

まざまな粒子数状態が重ね合わさった状態が実現するという意味にとるならばゲージ対称性の破れがなくても、超流動は実現することになる。

ただし粒子数確定の状態は、外界と粒子のやり取りができる環境ではすぐに粒子数不確定の状態への不安定化が起きると考えられている。そのような環境の方が超流動体としては自然であるとして、ゲージ対称性が破れた状態の方が、超流動体としては自然な状態とみなす考え方もある。

[他の系の応答特性]

参考までにほかの系で $Q_{\rm T}(q)$ がどのようにふるまうのかを見ておこう。

(a). 自由フェルミ気体：このときは

$$Q_{\rm T}(\boldsymbol{q}\to 0) = -\frac{N}{\Omega m} \tag{105}$$

となる. これから $\boldsymbol{q}\sim 0$ のとき $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{q})\sim N\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})/\Omega$ となり、フーリエ逆変換して

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{N}{\Omega}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{106}$$

となる。これは容器とともに角速度 $|\boldsymbol{\omega}|$ で剛体的に回転することを意味している。

(b). BCS(Bardeen-Cooper-Schrieffer 状態（絶対零度））：このとき

$$Q_{\rm T}(\boldsymbol{q}\to 0) = 0 \tag{107}$$

となるので Hess-Fairbank 効果は起きる。

(c). 自由ボース気体（絶対零度）: このとき

$$Q_{\rm T}(\boldsymbol{q}) = 0 \tag{108}$$

となる。この結果を文字通り受け取れば超流動である。この結果は以下のようにして簡単に示せる：

$$|g_N\rangle = \frac{\left(\hat{a}_0^\dagger\right)^N|0\rangle}{\sqrt{N!}}$$

より

$$\begin{aligned}\hat{j}_{\rm T}(\boldsymbol{q})|g_N\rangle &= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{k}}{\sqrt{\Omega}}\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\underbrace{\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}|{\rm g}_N\rangle}_{\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},0}|{\rm g}_{N-1}\rangle} &(109)\\ &= \frac{\overbrace{\boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}}\cdot(-\boldsymbol{q})}^{0}}{\sqrt{\Omega}}\hat{a}^\dagger_{-\boldsymbol{q}}|{\rm g}_{N-1}\rangle = 0. &(110)\end{aligned}$$

ただし、自由ボース気体の場合は系の境界条件、形状によってマクロなふるまいが大きく影響を受ける。図 6 は半径 R の円筒容器に流体を入れた場合の粒子密度の r

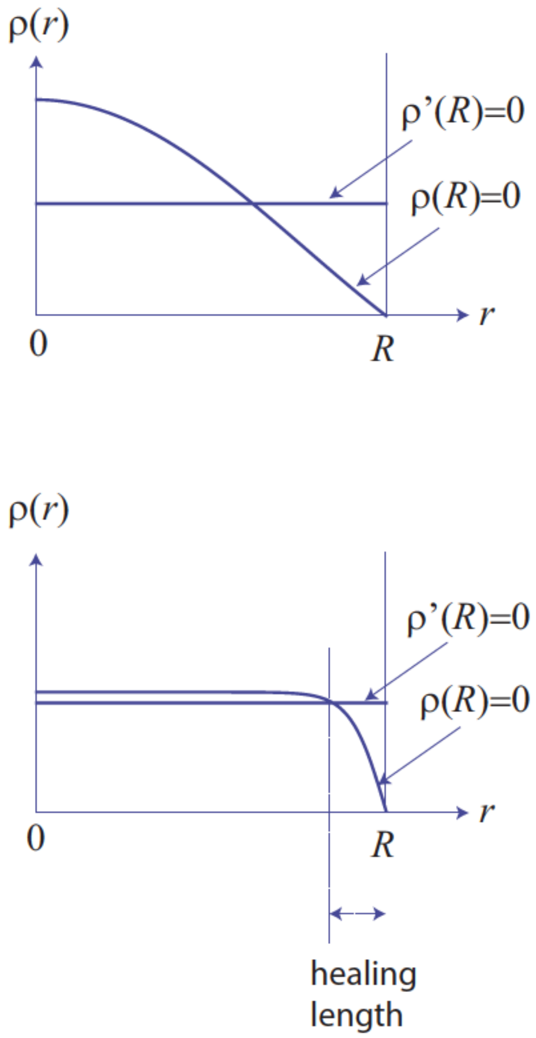

図 6: 半径 R の円筒容器に流体を入れた場合の粒子密度の r 依存性。上図は自由ボソン、下図は斥力相互作用するボソンの場合を表す。

依存性を表す。上図に示されるように自由ボソンの場合は、境界条件によって大きく変化する。上で示した計算では基底状態は空間的に一様であるとしているが、これは $\rho'(R)=0$ の場合に対応するが、物理的には $\rho(R)=0$ の場合に相当するので、図のように、その密度分布は中心が高密度で縁の辺りでは低密度になる。一方、下図に示したように相互作用するボース系では、物理量の空間変化は回復長 (healing length) と呼ばれる長さでスケールされるので、境界条件の違いはマクロな物性に大きな影響を与えない。自由ボソンの場合にも回復長を敢えて定義するとすればそれはシステムサイズ R 程度の長さということになる。

[ボース・アインシュタイン凝縮と超流動の関係]

自由ボース系についてはそのあたりのことに留意しておけば、上記の結果と単一モード近

似の結果から、超流動とボース・アインシュタイン凝縮の関係が見えてくる。単一モード

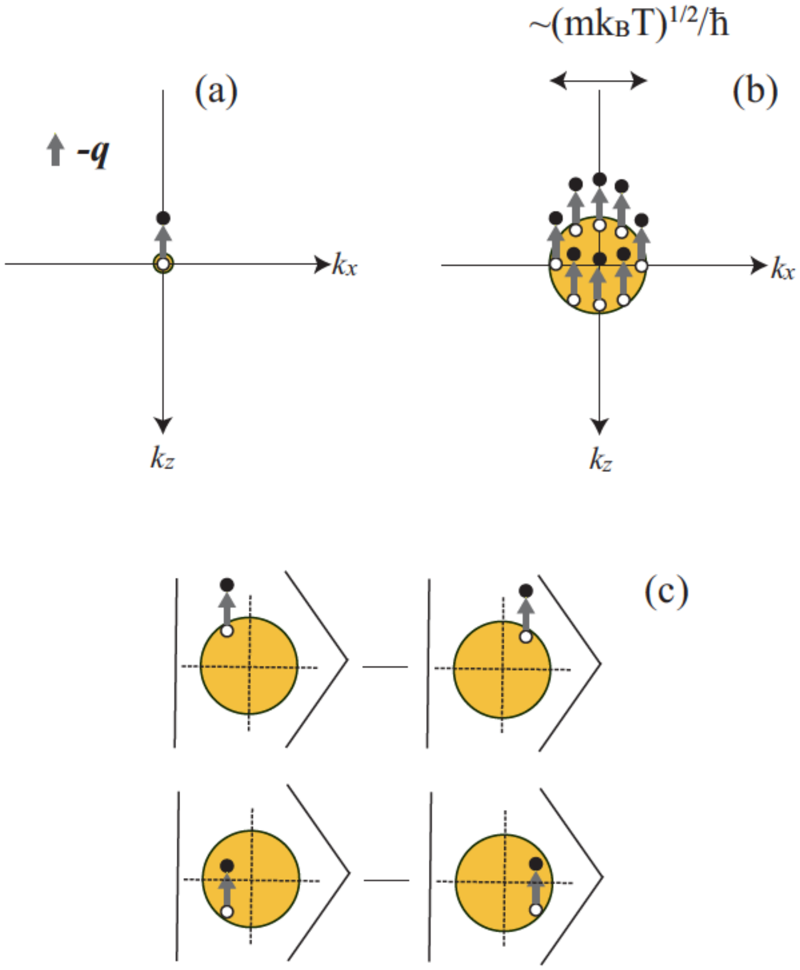

図 7: (a)$T=0$ での自由ボース系の励起状態。白丸が $\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ に対応し、黒丸が $\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}$ に対応する。(b) 有限温度自由ボース系の励起状態。平衡状態では熱的ドブロイ波長の逆数程度の波数までの状態が存在する。(c) 有限温度ボース系での横励起状態の例。温度が低ければ低いほど横励起状態の数は減少する。

近似で超流動性を示した際に

$$\text{「運動量}\ -\boldsymbol{q}\ \text{をもち、}\hat{R}_x\ \text{について奇である励起状態」} \qquad (\sharp)$$

が存在しないことが重要な点であった。($\sharp$) を「横励起状態」と呼ぶことにする。図 7(a) を見ると、$T=0$ では励起状態は $\hat{R}_x$ について偶であるので、横励起状態はなく超流動になる。有限温度になると熱的ドブロイ波長の逆数程度の波数を持つ状態があるので、$\hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ の $\boldsymbol{k}$ のとりうる値が増えて、(c) に例示したような、横励起状態が存在することがわかる。それらの励起が存在する分だけ流体は回転容器に引きずられて流れが生じ超流動密度が

減少する。運動量空間での熱平衡分布が広がればそれだけ横励起状態の数が増えるので、さらに高温になってボルツマン統計で扱える古典統計の領域で超流動が起こらないことも自然に理解できる。一方で、ボースアインシュタイン凝縮がおきると運動量分布が局在するので、横励起状態が作りにくくなり、その結果超流動状態が実現すると理解できる。

自由フェルミ系でも量子統計性によって横励起状態は少なくはなっている。図 8 に示すようにフェルミ統計性のため、白丸はフェルミ球の内側、黒丸は外側になくてはならないので、$\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ の $\boldsymbol{k}$ のとりうる値は、フェルミ面近傍に限られる。このために横励起状態の数も相応には小さくなるのであるが、(89) における Q_{T} の表式の分母（摂動論でよく現われるエネルギー分母）も同程度に小さくなるので、Q_{T} としては有限となり結果として超流動を示さない。フェルミ系が超流動を示すためにはもうひとがんばり必要で、BCS 状態のようにフェルミ面付近の励起エネルギーにギャップが空けば、エネルギー分母が有限になり、横励起状態の少なさがそのまま超流動をもたらすことになる。

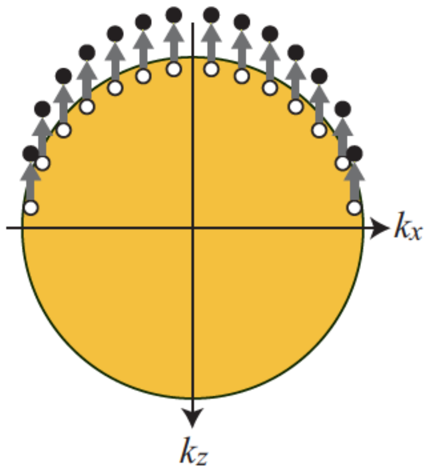

図 8: $T = 0$ での自由フェルミ系の励起状態。白丸が $\hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}$ に対応し、黒丸が $\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ に対応する。

4 準安定性；超流動のもう一つの特性

これまで熱平衡状態における超流動体の特性について述べてきた。ここでは超流動のもうひとつの重要な特性である準安定性について述べる。

[永久流 (persistent current)] 常流動状態の流体が入った肉厚の薄い容器を回転させてしばらくすると流体が容器とともに回転する熱平衡状態になる。(図 9)。準静的に温度を下げ超流動状態に転移させた後、容器を急に静止させる。通常の流体であれば流体の回転速度は速やかにゼロになるが、超流動体では事実上永久に流体が回転する [5]。これを永久流という。最終的な回転速度ははじめの回転速度に応じてさまざまな値をとるので、永久流は熱平衡状態ではなく準安定状態である。

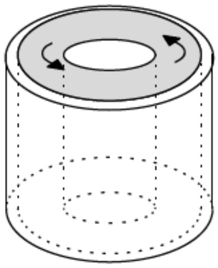

図 9: 永久流状態。ヘス・フェアバンク効果の時とは異なり容器は静止している。

[ランダウの超流動条件] 流れの状態の準安定性という観点から超流動を理論的に初めて議論したのはランダウ（Landau）である。ここでは $T=0$ を考えよう。

静止している流体の基底状態からの励起を考え、その運動量を $\boldsymbol{p}$, その大きさを p, 励起エネルギーを $\varepsilon(p)$ とすると、速度 $\boldsymbol{V}$ で流れている流体に対する励起スペクトルは

$$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{p}) = \varepsilon(p) + \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{p} \tag{111}$$

で与えられる。流れている流体の状態が安定であるためには、全ての $\boldsymbol{p}$ に対して $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{p})$ が非負の量である必要がある。p 一定の下では、$\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{p})$ の最小値は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{V}$ が反平行の時の値 $\varepsilon(p)-pV$ で与えられるから（V は $\boldsymbol{V}$ の大きさ）、流れる流体が安定である条件は

$$V \le \mathrm{Min}_p(\varepsilon(p)/p) \equiv V_{\mathrm{c,L}} \tag{112}$$

で与えられる。$\varepsilon(p)/p$ は励起状態の位相速度を表しており、位相速度の最小値 $V_{\mathrm{c,L}}$ がゼロでないとき、$V_{\mathrm{c,L}}$ 以下の速さで流体が流れる状態は安定であることを示している。(112) をランダウの超流動安定性条件 (Landau criterion) と呼び、$V_{\mathrm{c,L}}$ をランダウの臨界速度という。ランダウの描像では、$V_{\mathrm{c,L}}>0$ である系は超流動状態が安定になり得る系、$V_{\mathrm{c,L}}=0$ である系は超流動状態が安定になり得ない系ということになる。圧縮率が有限のボース系は多くの場合音速が有限のフォノン型の分散をもつ励起スペクトルを持つので、超流動は安定であり、自由ボースガスは励起エネルギーが $\varepsilon(p)\propto p^2$ で与えられるので、$V_{\mathrm{c,L}}=0$ となり超流動状態が安定になり得ない系ということになる。

[ランダウの条件は必要条件か十分条件か] 理論が提案された当初から、フォノン－ロトンスペクトルに対してランダウの臨界速度を見積もるとその速度以下でも液体ヘリウムの超流動相でエネルギー散逸が生じることは実験的に観測されたので（フォノン－ロトンよりも量子渦の臨界速度のほうが低いため）、ランダウの超流動安定条件は必要条件でしかないと言われている。

もっともランダウの条件は超流動が安定に存在するための必要条件ですらないという指摘もある [10]。素励起の不安定化が起こった先の状態が別の超流動（元の超流動状態とは対称性の異なる状態）である可能性もあるからである。ピタエフスキー (Pitaevskii) はランダウの臨界速度を超えたところで液体ヘリウム 4 の超流動相は密度が空間的に変調した構造（stripe 相、一種の supersolid）に移行すると議論した [8]。これに対応した結果は

（相互作用の到達距離が有限である場合の）グロス・ピタエフスキー方程式の数値計算でも確認されている [9]。

ランダウの条件は超流動の安定性の必要条件でないことはフェルミ超流動体のうちエネルギーギャップにノードを持つ系で、フェルミ運動量 $\hbar k_{\rm F}$ の 2 倍の運動量を持つ励起のエネルギーはゼロであるのに（したがってランダウの臨界速度はゼロなのに）超流動性を示すことにも見て取ることができる（たとえば [11] 参照のこと）。

[変分波動関数による永久流状態の記述] 永久流状態は前章と同様に変分関数を用いて表す

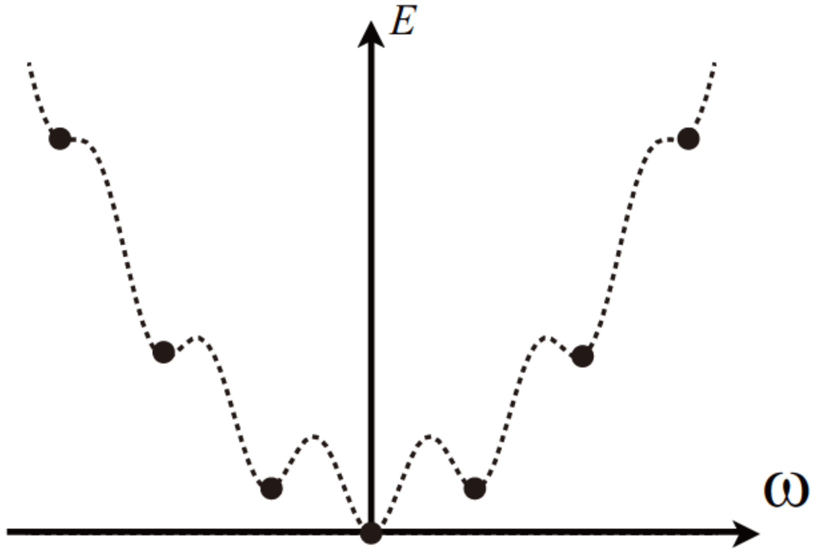

図 10: 永久流状態のエネルギーの角速度依存性。黒丸が永久流状態を表し、点線はその間を移り変わる過程の中間状態を表す。

ことも可能である。永久流状態の場合は容器は実験室系から見て静止しているから $\omega = 0$ とする。ただし整数 n は最後まで残す。この時のエネルギー期待値は

$$E'_{\rm trial} \;=\; E_0 + 2\pi^2 n^2 \hbar\omega_0 \left(\int_0^{2\pi} \frac{{\rm d}\theta}{\rho_0(\theta)}\right)^{-1} \tag{113}$$

（$\omega = 0$ だからプライムを付ける必要はないのだがこのまま使う。）となり、E_0 と ρ_0 の n 依存性が無視できるなら、エネルギーは n について 2 次関数となる。図 10 にエネルギー図の典型例を示す。極小のところが角速度 $n\omega_0$ で流れる永久流状態を表す。図 3 とは異なり、n について周期的でもないし、極小のところ以外は準安定ですらない。また不均一ポテンシャルがある場合は $|n|$ が大きくなるとやがて ρ_0 として $E'_{\rm trial}$ を極小にする解がなくなる。それが臨界速度に対応し、また非線形理論でいう分岐にあたる。

さて図 10 には極小点と極小点の間にはエネルギー障壁があるように書いてあるが、励起状態 $n \neq 0$ の永久流状態が最もエネルギー的に安定な $n = 0$ の状態に緩和してしまわない準安定性はどこから来るのだろうか。

物性研究・電子版 Vol. 4, No. 4, 044202（2015年11月号）

[再び回転容器系] 同様な準安定性は回転容器系でも生じる。容器の回転速度 ω をゼロからゆっくり上げていく。$\omega < \omega_0/2$ である限り、$n = 0$ の状態が基底状態であり、そこを超えると $n = 1$ が基底状態になる。しかし操作が断熱的であるとすると $\omega > \omega_0/2$ となっても、$n = 0$ の状態のままである。$n = 0$ と $n = 1$ の状態ではマクロな質量流（角運動量）の値が異なる。一方で断熱的であるとすれば物理量は連続変化するはずだからである。では $\omega = \omega_0/2$ 付近での断熱性を保証するものは何か。それは $n = 0$ から $n = 1$ へ移る過程における中間状態のエネルギーの高さである。ここで $n = 0$ から $n = 1$ への移行過程の波動関数として

$$\Psi'_{N_0,N_1}(\{\theta_i\};\omega_0/2) \tag{114}$$

$$= \Psi_0(\{\theta_i\})\mathrm{Sym}\left[\exp\left[\mathrm{i}\sum_{i=1}^{N_0}\varphi(\theta_i;\omega_0/2) + \mathrm{i}\sum_{i=N_0+1}^{N}\varphi(\theta_i;-\omega_0/2)\right]\right] \tag{115}$$

とおく。$\varphi(\theta_i;\omega_0/2), \varphi(\theta_i;-\omega_0/2)$ はそれぞれ winding number が $n = 0$ と $n = 1$ に相当する。記号 Sym は粒子座標を対称化する演算子 (Symmetrizer) である。N_0, $N_1 = N - N_0$ はそれぞれ winding number $n = 0$ と $n = 1$ を持つ粒子数を表す。$(N_0, N_1) = (N, 0)$ は $\omega = 0$ の時の基底状態と連続的につながり、$(N_0, N_1) = (0, N)$ は $\omega = \omega_0$ の時の基底状態と連続的につながる。このふたつの状態はすべての粒子が同じ一粒子関数であらわされているという意味でボース・アインシュタイン凝縮状態だといっていいだろう。だとすればその中間の状態 (115) は分割されたボース・アインシュタイン凝縮状態 (fragmented Bose-Einstein condensed state; fBEC) と呼ばれるものに相当する [15]。この中間状態では、異なる winding number の状態が混ざっているため、必然的に両者の干渉に由来する粒子密度の変調が生じる。相互作用は空間的に一様な場合にエネルギー的には得をするので、中間状態では相互作用エネルギーは大きくなる [12]。一方で $\omega = \omega_0/2$ であるから運動エネルギーは N_0, N_1 の割合によらない。中間状態と始状態または終状態のエネルギー差は粒子数に比例するという意味でマクロな大きさを持ち、これが $(N_0, N_1) = (N, 0)$ と $(N_0, N_1) = (0, N)$ の間の遷移を妨げ、断熱的操作を可能にしている。ここまで $\omega = \omega_0/2$ の場合（二つのボース・アインシュタイン凝縮状態が縮退している場合）に限って話をしたが、そこから ω がずれている場合でも同様な議論が当てはまるし、永久流についても事情は同じである。ここまでリング形状（粒子の位置が角度変数だけで指定できる）の超流動体を例にとって準安定性について説明してきたが、2 次元、3 次元で起きる超流動の準安定性の存在とその起源についても同様なことが言える。2 次元の超流動で障害物ポテンシャルがある場合、上の fBEC 状態に相当する中間状態には複数の量子渦の対が存在しうることが最近分かった [13]。

[準安定性と密度の固さ] 相互作用がなければ、密度変調に由来するエネルギー障壁は存在しないのであるから、理想ボース気体のように柔らかいボース・アインシュタイン凝縮系では超流動の準安定性が存在しないことになる。超流動の準安定性にも密度の固さが求められるわけである。

5　その他のこと

永久流には臨界速度が存在するとさきほど述べたが、臨界速度では準安定状態とエネルギー障壁を与えていた中間状態（fBEC 状態）のエネルギーが等しくなり、障壁そして準安定性が消失する。障壁が低くなっているに従い増大するのが密度の揺らぎである。障害物がある 2 次元超流動系の場合（量子渦生成を伴い超流動が壊れる）においても障害物がある 1 次元超流動系（ソリトン生成を伴い超流動が壊れる）においても動的な密度揺らぎが臨界速度付近で増大していることがグロス・ピタエフスキー方程式とボゴリューボフ方程式の解析からわかっている。ここでも密度の固さと超流動の関係が示されている。

ここまでの内容だと超流動の成立要因としてはボース・アインシュタイン凝縮は本命とも言えそうだし、何が今更問題なのかと思うかもしれないが、実際には超流動密度の表式にはあらわに「凝縮」の役割が見えにくいことも多い。超流動密度を線形応答で求めるやり方を、低エネルギー長波長で密度励起しかない場合にあてはめると超流動性が導かれる。どこにボース・アインシュタインが効いているのだろう。超流動密度の不均一ポテンシャルにより影響を摂動論で扱う場合もボース・アインシュタイン凝縮の役割は見えにくい。そのあたりのことを交えて講義を進めていきたい。

6　謝辞

本稿の著者（加藤）は超流動について渡部昌平、高橋大介、國見昌哉、越田真史各氏との共同研究を通して多くのことを学んできました。國見氏には図の原案を提供していただきました。本稿を書くにあたって [16, 17] も参考にしました。ここに感謝いたします。

(追記)2015 年 7 月に開かれた物性若手夏の学校でこの講義に参加し、積極的に議論に加わってくださった参加者の方々と世話人の臼井彩香さんに感謝いたします。

参考文献

[1] 液体ヘリウム超流動の発見の歴史については K. メンデルスゾーン著、大島恵一訳：絶対零度への挑戦—低温の世界を求めた科学のドラマ（講談社、東京、1971）。超流動、超伝導に関心を持つ人には常にこの本を薦めている。

[2] I. Bloch, J. Dalibard and W. Zwerger: Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 885.「超流動の必要条件は非対角長距離秩序と有限の圧縮率である。」と明確に指摘されている。この文献の Appendix: BEC and Superfluidity (p.953-p.956) を参照のこと。

[3] A. Leggett: *Quantum Liquids* Oxford Univ. Press 2006.

[4] M. E. Fisher, M. N. Barber and D. Jasnow: Phys. Rev. A **8** (1973) 1111.

[5] J. D. Reppy: Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 733.

[6] すでに多くの人によって認識されていたと思われるが、あらわに書いているのが A. J. Leggett: Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 307 である.

[7] A. J. Leggett: New J. Phys. **5** 103.

[8] L. P. Pitaevskii: JETP lett. **39** (1984) 511.

[9] M. Kunimi and Y. Kato: Phys. Rev. B **86** (2012) 060510(R).

[10] G. Baym and C. J. Pethick: Phys. Rev. A **86** (2012) 023602.

[11] 山田一雄、大見哲巨：超流動（培風館、東京、1995 年）.

[12] E. J. Mueller: Phys. Rev. A **66** (2002) 063603.

[13] M. Kunimi and Y. Kato: Phys. Rev. A **91** (2015) 053608.

[14] A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **25** (1970) 1227.

[15] fragmeted BEC については文献 [3] の 2-6 節、5-8 節参照。

[16] 國見昌哉: 博士論文（東京大学）（平成 25 年度）.

[17] 越田真史: 修士論文（東京大学）（平成 26 年度）.