

雲の物理学入門

島 伸一郎, 兵庫県立大学シミュレーション学研究所

本稿は第57回物性若手夏の学校の集中ゼミ「超水滴法による雲形成・降水の精密シミュレーションとその応用」のテキストとして書かれた。雲に関わる多種多様な物理を概説した後、最も基本的な部分に対してその基礎方程式を書き下し解説する。得られた方程式系は計算コストが膨大で実際に数値シミュレーションする事は難しい。超水滴法はこの系を粗視化して計算する手法の1つである。その詳細は原論文に任せるとして、本稿は原論文の予備知識を提供する補助的資料である。

1 はじめに

地球の気候システムにおいて雲は重要な役割を果たしているが、予測モデルの中で雲をどう表現するかは依然として未熟である。例えば、温暖化に対する人間活動の影響をIPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) が評価しているが、雲の役割はその量や光学的特性、高度などによって変化するため、温暖化を促進するのか抑制するのかさえ明確には理解されていない。このため、雲のふるまいを定量的に評価できる数値モデルを開発する努力が続けられている。

このような背景のもと、我々は超水滴法 (Super-Droplet Method, SDM) という新しい計算手法を開発した (Shima *et al.*, 2009)。超水滴法はエアロゾル粒子・雲粒・降水粒子の運動と状態変化を、確率的な粒子法を使って統一的に計算する方法であり、既存の手法の様に経験的なパラメタに頼る事無く、より原理的な物理法則に基づいて時間発展を計算することができる。特に、多種類の化学物質から成るエアロゾルが存在する場合など、より複雑で現実的な雲微物理過程の正確なシミュレーションを比較的早く行うのに適していると考えられる。さらに、雲に限らず、一般に確率的に衝突併合を繰り返す離散粒子系に超水滴法は適用可能であり、例えば噴霧燃焼や惑星形成のシミュレーションにも応用できるであろう。

本稿は、雲の物理学に関する入門的事項を簡潔にまとめた物である。まず2節で雲に関わる多種多様な物理を概説する。雲の物理は大きく2つの部分に大別され、1つは窒素・酸素・水蒸気などの気体に関する雲力学過程、もう1つは大気中を漂うエアロゾル・雲粒・降水粒子などの粒子に関する雲微物理過程である。3節と4節では、それぞれの最も基本的な物理に関する基礎方程式を書き下し、解説する。

こうして得られた方程式系の直接シミュレーションができれば、ある種の雲のふるまいはかなり正確に再現できると期待されるが、その計算コストは膨大であり、現在のコンピュータでは事実上不可能である。この系を粗視化して計算する方法の1つが超水滴法である。詳しくは原論文を見て頂くとして、本稿は原論文では省略した雲の物理学の基礎的知識を提供する事を意図して書かれた。そのためもあって本稿の内容は気象学的にみて大分偏っている。より網羅的な入門書としては (小倉義光, 1999) をお勧めする。

2 雲に関わる物理の概要

雲の形成や降水現象を支配する物理法則を概説する。地球の大気は窒素や酸素、水蒸気などの気体から成るわけだが、実はその中を多数の微小粒子が漂っている。まず、雲自身が多数の水滴や氷の粒により構成されており、大きさに応じて便宜的に雲粒や降水粒子と命名されている。また、雲の無い所であっても、地表から巻き上げられた土壌粒子や、海面から放出された海塩粒子、硫黄化合物の酸化によって形成された硫酸塩粒子、等々の多様な化学組成の粒子が多数漂っており、これらはエアロゾル粒子(浮遊粒子状物質)と呼ばれる。エアロゾル数密度は場所により大きく変動し、都市域は田舎や海辺と比べ10倍も100倍も多いのが典型的である。

この通り大気は気体と粒子により構成されるが、気体のふるまいを表す流体力学的な物理法則を「雲力学過程」と呼び、エアロゾル粒子や雲粒の生成といった粒子の振舞いに関わる部分を「雲微物理過程」と呼ぶ。大気流体の運動の空間スケールはざっと1mmから数千kmにわたるのに対し、粒子の大きさはざっと1nmから1mm程度である。この通り、雲力学過程に比べて大部対象スケールが小さい事が、微物理過程と呼ばれるゆえんであろう。では、雲微物理過程についてさらに詳しく見ていこう。

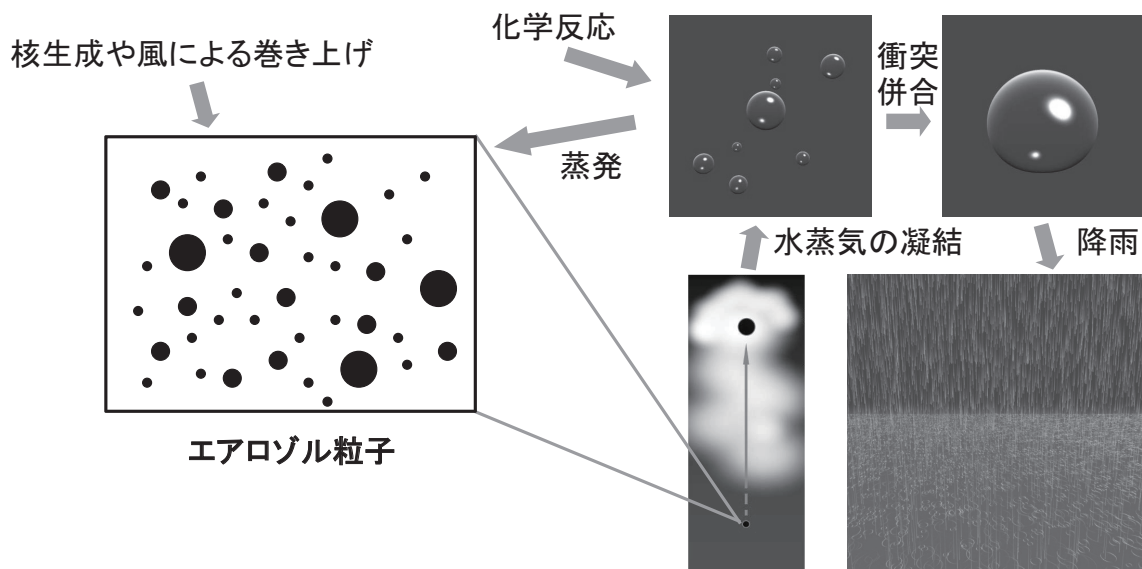


図 1: 雲が形成され雨が降るまでの主要な雲微物理過程。雲が氷の粒を含むような「冷たい雲」ではさらに複雑なプロセスが関与してくる。

図 1は雲が形成され雨が降るまでの主要な雲微物理過程を表わした模式図である。大気中のいたる所にエアロゾル粒子が漂っているが、これは地表から風により巻き上げられたり、化学反応などによって大気中の気体が核生成してできた物である。さて、大気が蓄える事のできる水蒸気量は温度により決まっている。対流や地形の効果により気温が下がるなどして水蒸気が飽和すると、蓄えきれない余分な水蒸気は気体から液体に相変化し水滴を形成するが、ここでエアロゾル粒子が重要な役割を果たす。実は、エアロゾル粒子が全く含まれない理想的にきれいな空気中では、湿度が200%に達しても水滴は

事実上形成され無い事が知られている。これは、液体状態だけでなく、水蒸気と言う気体状態も熱力学的にそれなりに安定だからである。しかし、そこに吸湿性のエアロゾル粒子があると、これらは水蒸気の凝結を助けるため、湿度が 100 % を越えた所でただちにエアロゾル粒子を核とした水滴ができる。これが我々の目に雲として映る訳である。水蒸気はさらにこれらの水滴上で凝結を続け、水滴はさらに大きくなる。また、水蒸気が液相に変わる際に潜熱が放出されるため、雲の内部は温かくなる。凝結成長過程により雲粒が $10\mu\text{m}$ 程度の大きさになると、雲粒が互いに衝突し併合する過程が活発になり、これにより $100\mu\text{m}$ から数 mm 程度の水滴が形成される。これくらいの大きさになると、水滴は重力により地面に落ちていくのだが、これが我々には雨として認識される。この時、雨粒は、元々含まれているエアロゾル成分に加え、途中で周辺のエアロゾル粒子を捕捉しながら地面に落ちていくため、雨には大気中のエアロゾル粒子を減らす効果がある。一方、雨にならずに上空に残った雲粒が蒸発すると不揮発性の成分が大気中に残り、再びエアロゾル粒子として大気中を漂う。また、雲粒上では化学反応が起こり、例えば二酸化硫黄が酸化して硫酸塩が生成される。そのため、雲の生成・消滅のサイクルの中で、エアロゾル粒子の化学組成は次第に変化して行く。以上は水の粒を含まない「暖かい雲」の場合である。気温が 0°C 以下になると雪やあられと言った氷の粒子が形成されるが、この様な雲は「冷たい雲」と呼ばれ、さらに多くの雲微物理過程が関与する。

雲に関わる物理法則を大きく雲力学過程と雲微物理過程の 2 種類に分けたが、この 2 つは相互に影響を及ぼし合い、全体として複雑なシステムを構成している。雲力学過程は気温や水蒸気、風の場合を通して雲微物理過程に影響を及ぼす一方、雲微物理過程も水蒸気や熱、運動量のやりとりなどを通して雲力学過程に影響を及ぼしている。そのため、2 つを個別に扱っていたのでは系の全体の振舞いを正確に調べる事はできない。

雲に関わる物理の概要がつかめたところで、次の節では、最も基本的な雲微物理過程として、粒子の移流と重力落下、水蒸気の凝結/蒸発による粒径変化、粒子の衝突併合の 3 つを取り上げ、具体的にその基礎方程式を書き下し、特徴を解説する。

3 雲微物理過程

3.1 状態変数

エアロゾル/雲粒/降水粒子をひっくるめた総称として“粒子”と言う呼び名を使う事にする。

時刻 t における大気中の粒子の総数を $N_r(t)$ とする。 i 番目の粒子の状態は、 $\{\mathbf{x}_i(t), \mathbf{v}_i(t), R_i(t), M_i(t)\}$ で表される。ここで、 $i = 1, 2, \dots, N_r(t)$; $\mathbf{x}_i(t)$ は粒子の位置座標; $\mathbf{v}_i(t)$ は粒子の速度; $R_i(t)$ は粒子が含む水に関する等価半径で、粒子は半径 $R_i(t)$ の球と同じ体積の水を含むと解釈する; $M_i(t)$ は粒子に含まれる硫酸アンモニウムの質量。

もし R_i が小さく $0.1\mu\text{m}$ 程度かそれ以下の場合、その粒子は水を余り含まないため、硫酸アンモニウムエアロゾルとみなすことができる。この時、硫酸アンモニウムは完全に水に溶けている場合もあれば、湿った固体状の場合もあるが、今回その区別は特にしない事

にする。また、エアロゾル自体も典型的には $0.1 \mu\text{m}$ からそれ以下の大きさを持つが、 R_i はあくまで水の量の指標であり、湿ったエアロゾルの大きさは R_i では測れない事に注意しよう。 R_i が $10 \mu\text{m}$ 程度ならば雲粒、 $100 \mu\text{m}$ 程度以上ならば雨粒と分類され、この時は硫酸アンモニウムは完全に水に溶けており粒子は液滴状になっている。

3.1.1 粒子の移流と重力落下

粒子は大気流体場からの粘性抵抗と重力により大気中を移動する。緩和が十分に早く、粒子はいつでも終端速度で動いていると仮定すると、以下の運動方程式が導かれる。

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{U}_i^* - \hat{z}v_\infty(R_i, T_i^*, P_i^*), \quad \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{U}_i^* 、 T_i^* 、 P_i^* は粒子の位置 $\mathbf{x}_i(t)$ における大気流体場の風速、気温、気圧である。また、 $v_\infty(R_i, T_i^*, P_i^*)$ は鉛直方向の終端速度である。つまり、粒子は水平方向には常に風速と同じ速さで、鉛直方向には風速と $-v_\infty$ ずれた速さで動いているという事になる。

v_∞ は Beard (1976) による半経験的な公式が有名である。具体的な表式とその導出は原論文や Pruppacher and Klett (1997) の 10.3.6 節をあたってもらおうとして、その R 依存性は図 2 の様になる。101.3 kPa, 20 °C の時の実測値 (Gunn and Kinzer, 1949) と Beard の公式の値を両方プロットした。

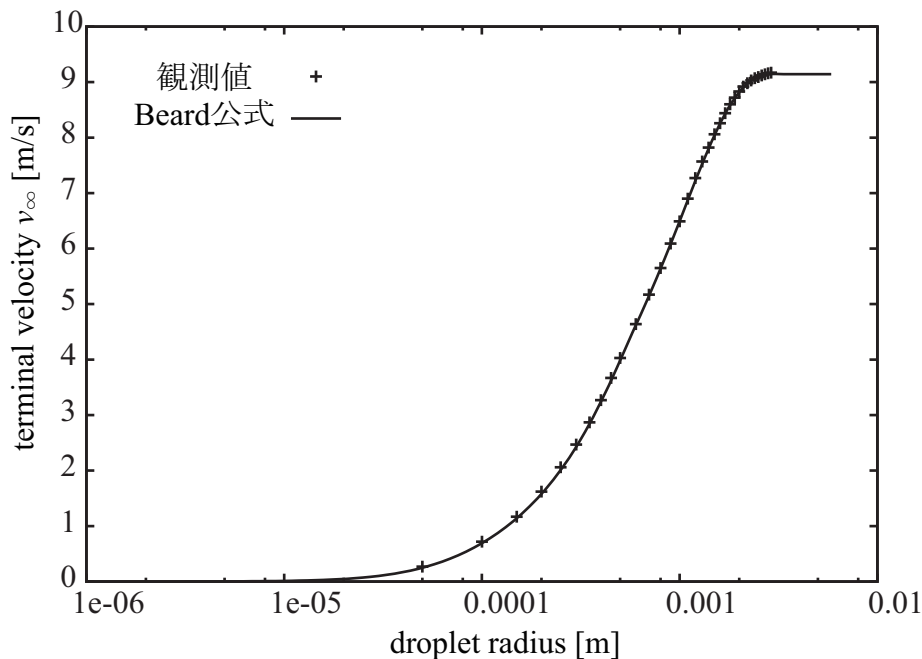


図 2: 水滴の半径と終端速度の関係。気圧と気温が 101.3 kPa, 20 °C における観測値 (Gunn and Kinzer, 1949) と Beard の公式の値をプロットした。

10 μm 程度以下の粒子の終端速度はほとんど 0 m/s のため、落ちてこない事が分かる。一方大きさが数 mm 程度になると、約 10 m/s で落ちて行く。これが我々には雨として認

識されるのである。雨が降る際には、その雨粒に含まれている硫酸アンモニウムも一緒に地面に落ちる事になる。この様に雲や雨を介してエアロゾルが大気から取り除かれるプロセスを湿性沈着と呼ぶ。

今 v_∞ は等価水滴半径 R にしか依存しないとしたが、実際には R が小さい場合は硫酸アンモニウムの質量 M にも依存する。エアロゾルが雲や雨を介さずに直接地面に降下する事を乾性沈着と呼ぶが、この様な現象も再現したい場合は v_∞ に対する M 依存性を考慮する必要がある。

また、粒子は常に終端速度で動いていると仮定したが、この点についても注意が必要である。流体乱流中で、質量のある粒子は非一様な空間分布 (クラスタ) を形成する事が知られている (e.g., Chen *et al.*, 2006)。常に終端速度で動いているという我々の仮定は、慣性の効果を見捨てるという近似であり、このクラスタリングが正確に再現されない事になる。慣性粒子のクラスタリングが雲のふるまいに与える影響を知りたい場合は、運動方程式をあらわに解くなど、何らかの形で慣性の効果を取り入れる必要がある。

3.1.2 水蒸気の凝結/蒸発による粒径変化

粒子の等価水滴半径 R_i は水蒸気の凝結や蒸発により時間変化する。単純には水蒸気が過飽和だと粒子に水蒸気が凝結し R_i は大きくなり、未飽和だと粒子から水蒸気が蒸発し R_i は小さくなるのだが、水滴の表面張力の効果や硫酸アンモニウムの溶解効果で実効的な飽和水蒸気圧が変化するので話は少し複雑になる。

Köhler 理論に基づきこれらの効果を考慮に入れると、 R_i の時間発展方程式は以下の様になる (Köhler, 1936; Rogers and Yau, 1989; Pruppacher and Klett, 1997, Chap. 13)。

$$R_i \frac{dR_i}{dt} = \frac{1}{F_k(T_i^*) + F_d(T_i^*)} \left\{ S_i^* - \frac{e'_s(R_i, M_i, T_i^*)}{e_s(T_i^*)} \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{e'_s(R_i, M_i, T_i^*)}{e_s(T_i^*)} = 1 + \frac{a(T_i^*)}{R_i} - \frac{b(M_i)}{R_i^3},$$

$$F_k(T_i^*) = \left(\frac{L}{R_v T_i^*} - 1 \right) \frac{L \rho_{\text{liq}}}{K T_i^*}, \quad F_d(T_i^*) = \frac{\rho_{\text{liq}} R_v T_i^*}{D e_s(T_i^*)}.$$

ここで、 S_i^* は粒子の位置 \mathbf{x}_i における水蒸気の飽和度; T_i^* は粒子の位置における気温; F_k は熱伝導に関する項; F_d 水蒸気の拡散に関する項; e'_s/e_s は実効的な飽和蒸気圧とバルク水面に対する飽和水蒸気圧の比; a/R_i は水滴の曲率に応じ実効的な飽和水蒸気圧が増加する効果を表した項; b/R_i^3 は硫酸アンモニウムが溶ける事によって実効的な飽和水蒸気圧が減少する効果を表した項。近似的に、 $a \simeq 3.3 \times 10^{-5} \text{ cm K}/T_i^*$, $b \simeq 4.3 \text{ cm}^3 i M_i/m_s$ が成立する。ここで、添字でない i はイオン解離度で、硫酸アンモニウムや塩化ナトリウムでは 2 とするのが良い近似である (Low, 1969)。 m_s は硫酸アンモニウムの分子量で 132.14。 $R_v = R/m_s$ は水蒸気の比気体定数 (specific gas constant) で 461.5 J/kg/K, K は空気の熱伝導率で、100 kPa, 20 °C の時 $2.55 \times 10^{-2} \text{ J/m/s/K}$ 。 D は水蒸気の子拡散係数で、100 kPa, 20 °C の時 $2.52 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。 L は水の蒸発潜熱で、20 °C の時、 $2.453 \times 10^6 \text{ J/kg}$ 。 ρ_{liq} は液体の水の密度で、20 °C の時 998.203 kg/m³。 $e_s(T)$ は平

らな純水の水面に対する飽和水蒸気圧で、 $-30\text{ }^\circ\text{C} < T < 30\text{ }^\circ\text{C}$ の間では良い近似で $e_s(T) = (0.6112\text{ kPa}) \exp\{17.67(T - 273.15\text{ K})/(T - 29.65\text{ K})\}$. 我々は L, K, D を定数として扱ったが、より正確な計算を行うためにはその気温や気圧依存性を考慮しなければならない.

式(2)は何やらややこしい感じだが、その定性的なふるまいを理解する事はそれほど難しくくない. 図3は $M = 1.0 \times 10^{-16}\text{ g}$, $T = 293\text{ K}$ に対する Köhler 曲線 e'_s/e_s で、典型的にはこの様な形をしている. 水滴の等価半径 $R \rightarrow \infty$ で水滴の表面は平らと見なせ、また硫酸アンモニウムの濃度も無視できる様になるため、 $e'_s/e_s \rightarrow 1$ となる. R が小さくなると、表面張力の効果により、実効的な飽和水蒸気圧が大きくなる事がわかる. もしこの水滴にエアロゾルが溶けていないと曲線はこのまま上昇し続ける. この事からも、エアロゾルが無いと雲粒が形成されにくいと言う事がうかがえる. 実際にはエアロゾルの溶解効果により実効的な飽和水蒸気圧が下がり、Köhler 曲線は有る所 (R_c, S_c) で下降に転じる.

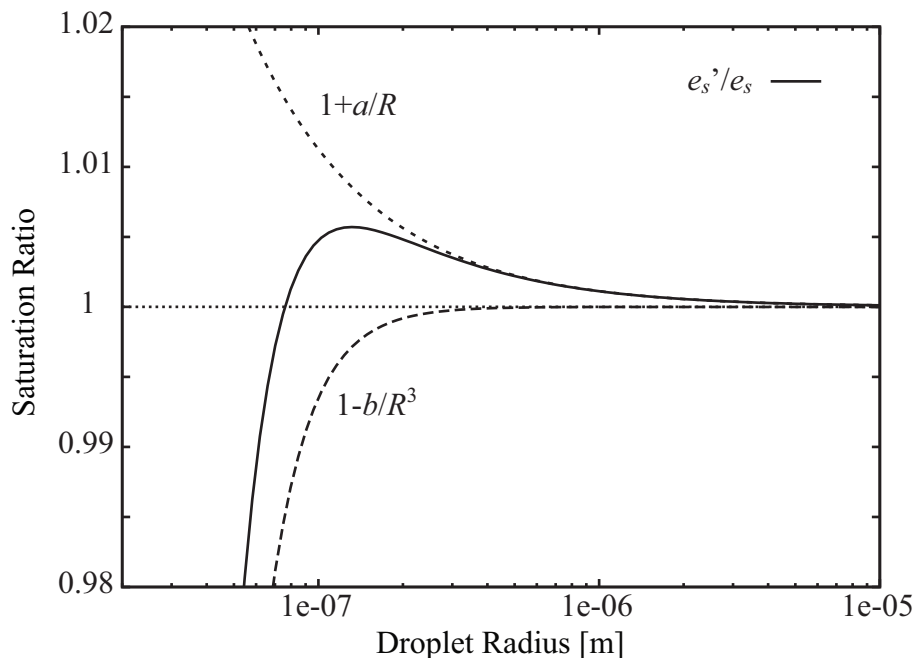


図3: 気温 293 k, 硫酸アンモニウム $1.0 \times 10^{-16}\text{ g}$ の時の Köhler 曲線 e'_s/e_s . 水滴の半径に依存して実効的な飽和水蒸気圧の変化する様子が分かる.

では、水蒸気が未飽和である $S \leq 1$ の時を考えよう. S と Köhler 曲線は交点を1つ持つ事が直ぐに分かる. これは安定な不動点であり、任意の初期条件に対して R は時間とともにこの不動点に収束する. つまり、水蒸気が未飽和であるにも関わらず、エアロゾルの溶解効果により、この粒子の水は蒸発する事無く、水滴として大気中を漂うと言う事になる.

$1 < S < S_c$ では交点が2つになる. 小さい方は安定不動点であるが、大きい方は不安定不動点である. よって、始めから大きな水滴はさらに成長して大きくなっていく一方、小さな水滴は水蒸気が過飽和であるにも関わらず成長できない事がわかる.

$S_c \leq S$ では交点がなくなり、水滴の大きさにかかわらず水蒸気が凝結し、 R は成長し続ける事がわかる。

S_c の高さはその粒子に含まれるエアロゾル量が多い程低くなる、つまり成長しやすく成る。よって、実際に雲ができるときは、エアロゾル粒子群のうちエアロゾルを比較的沢山含む一部の粒子にだけ選択的に水蒸気が凝結して大きくなっていく一方、その他の物は小さいままに留まる。

前者のグループが我々に雲として観測される訳であり、雲粒が活性化されたとみなす。この雲粒の活性化に使われたエアロゾル粒子を、雲凝結核 (Cloud Condensation Nuclei, CCN) と呼ぶ。よって、あるエアロゾル粒子が雲凝結核になるかどうかは、大気がどれくらい過飽和になるかが分からないと決まらない。

さて、一旦雲粒になった粒子がこのまま成長を続ければ、いずれ雨粒として落ちてくるぐらいの大きさになりそうだが、実際には R が大きくなるに従って成長速度が急激に遅くなるため、凝結成長は雨粒の形成には直接的には寄与しない。雨粒の形成に重要な役割を果たすのは衝突併合のプロセスである。次節でこの点について話をしよう。

なお、式 (2)においてエアロゾルの溶解効果を考慮したが、これは Raoult の法則に基づいており、エアロゾルが全て水に溶けている事を仮定している。実際には飽和度 S が低い時はエアロゾルは溶けていないか一部のみが水に溶けた状態になっていると考えられるため、ここを正確に再現したい場合はモデルの拡張が必要である。

3.1.3 粒子の衝突併合

粒子の衝突併合とは、2つの粒子がぶつかってひとつになり、1つの粒子になる事である。例えば、大きい水滴は落下速度が速く、落ちていく際に小さい粒子を捕捉して行くため、衝突併合が起こる (図 4)。

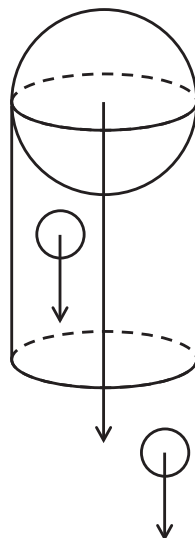


図 4: 大きな水滴が落下の際に小さい水滴に追いついて衝突併合する様子の模式図。

このプロセスは確率的な過程として扱う事ができる (e.g., Gillespie, 1972). ある体積 ΔV の領域内の水滴 j と k について考えよう. 十分短い時間間隔 ($t, t + \Delta t$) の間にこの2つの粒子が掃過する体積は, $\pi(R_j + R_k)^2 |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k| \Delta t$. もし ΔV が十分小さければ, 大気流体場の乱流により水滴は十分乱雑に混ざっていると見なせる (well-mixed). すると, この間に2つの粒子 j と k が衝突併合する確率 P_{jk} は, 掃過体積と領域体積の比になって,

$$P_{jk} = \pi(R_j + R_k)^2 |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k| \frac{\Delta t}{\Delta V}.$$

この評価は小さな粒子に対しては不正確である. 小さい粒子は相手粒子を回りこむ様に流れる大気流体場に引きずられて相手を避けてしまうし, 衝突したとしても併合せずに跳ね返る事もある. そこで, より正確な確率として, 衝突効率 $E(R_j, R_k)$ をかけて補正した物が使われる (Pruppacher and Klett, 1997, Chap. 14).

$$P_{jk} = E(R_j, R_k) \pi(R_j + R_k)^2 |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k| \frac{\Delta t}{\Delta V}. \quad (3)$$

色々な $E(R_j, R_k)$ が提案されているが, $\min(R_j, R_k) \leq 30 \mu\text{m}$ には Davis (1972) と Jonas (1972) の理論が, $\min(R_j, R_k) > 30 \mu\text{m}$ には Hall (1980) の理論が正確な値としてしばしば使われる. 詳細な導出は文献に任せるとして, 最終的に得られる P_{jk} を R_j と R_k の関数としてプロットすると図5の様になる. ここで, j と k は衝突の直前は同じ位置にいるため, $|\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k|$ は終端速度速度の差となる, よって R_j と R_k の関数とみなせる. また, $\Delta V = 1 \text{ cm}^3$, $\Delta t = 1 \text{ s}$, 101.3 kPa , $20 \text{ }^\circ\text{C}$ とした.

対角線は0になっているが, これは同じ大きさの粒子の終端速度は等しいので $P_{jk} = 0$ となるからである. また, 小さい粒子はほとんどぶつからない事も分かる. 実際の雲を数値計算すると, $10 \mu\text{m}$ より大きな雲粒ができないと衝突併合はほとんど起こらないと言うのが感覚である. 逆に一旦 $10 \mu\text{m}$ 程度以上の雲粒が形成されると加速度的に衝突併合が起こり, 雨粒となり落下していく. この, 雲粒が $1 \mu\text{m}$ 程度から $10 \mu\text{m}$ 程度の大きさになるまでの間を橋渡しするのが, 前節で紹介した水蒸気の凝結プロセスである.

今, 2つの粒子に注目して衝突併合を考えたが, 実際には周りに無数の粒子があつてどれとも衝突併合の可能性がある. この事は次の様に考えると分かりやすい. まず, 空間を体積 ΔV の格子に分割しよう. 各格子内の粒子は互いに衝突併合する可能性があると考えよう. つまり格子内の粒子の全ての組み合わせが式 (3) で与えられる確率で衝突併合する事になる. さて, ΔV の取り方は十分小さい限り任意であった. もし ΔV を半分にしたとするとどうなるか. 各 P_{jk} は $1/\Delta V$ に比例するので2倍になるが, 格子あたりの粒子数は $1/2$ になるので, ある粒子が他の粒子と衝突併合する確率は, 確かに ΔV によらない事が分かる.

よく混ざっているとみなせる ΔV の上限はどれくらいであろうか. 雲の中の乱流の強さと, 衝突併合過程の時間スケールを考えるとこれを見積もる事ができる. 詳細は Shima *et al.* (2009) の 2.1.4 を見てもらうとして, ざっと $30\text{-}300 \text{ m}$ と算出できる.

今回重力落下による衝突併合について考えた. このメカニズムだけ考えると, サブミクロン以下のエアロゾル粒子はほとんど衝突併合しない事になるが, 実はこのサイズの粒子に対しては Brown 運動に起因する衝突併合が支配的になる (Seinfeld and Pandis, 2006,

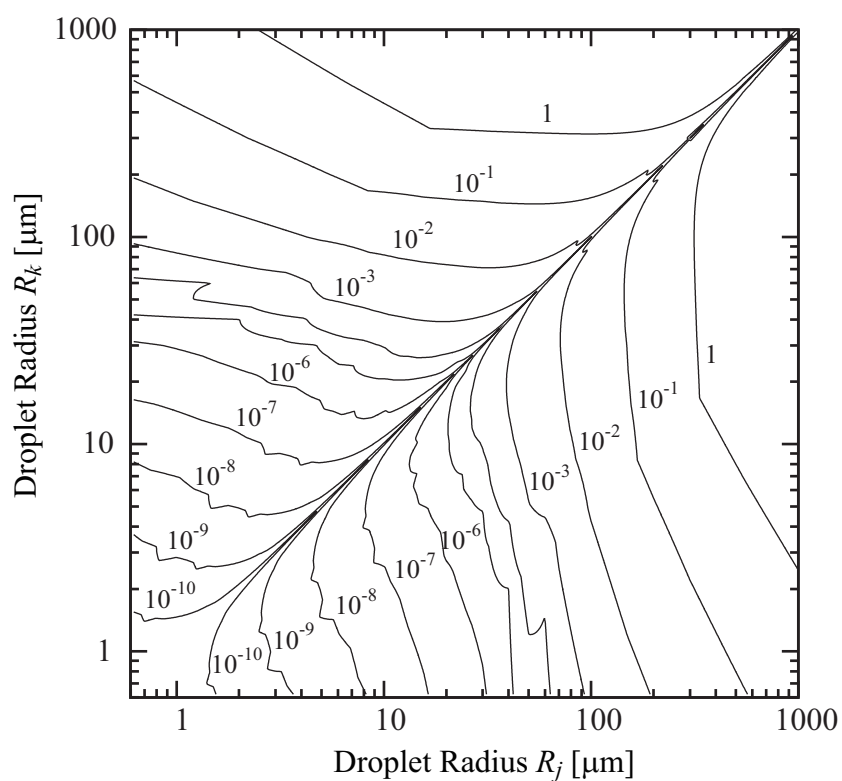


図 5: P_{jk} を R_j と R_k の関数としてプロットした等高線図. $\Delta V = 1 \text{ cm}^3$, $\Delta t = 1 \text{ s}$, 101.3 kPa , $20 \text{ }^\circ\text{C}$ とした.

Chap. 13). エアロゾル同士の衝突併合による成長や、雲の中や降雨の際にエアロゾルが雲粒や雨粒に取り込まれる現象を再現したい場合は、Brown 運動による衝突併合を考える必要がある。これもやはり確率的なプロセスとして扱う事ができる。

また、先に乱流により慣性粒子がクラスタリングする事に触れたが、関連して粒子の衝突併合が乱流により促進される可能性が示唆されている Falkovich *et al.* (2002)。これらの効果も衝突併合確率に取り込む事ができるであろう (Onishi *et al.*, 2011)。

以上で最も基本的な雲微物理過程の基礎方程式が書き下された。雲微物理過程についてより深く学びたい場合は Pruppacher and Klett (1997) がバイブル的である。次節では雲力学過程について考えよう。

4 雲力学過程

4.1 湿潤大気

水蒸気を除いた空気を乾燥大気 (dry air) と呼ぶ。乾燥大気の化学組成は高度約 80 km までほとんど変わらない事が知られており、約 78% が窒素、約 21% が酸素から成る。一方水蒸気の量は場所や時間によって大きく変動する。乾燥大気と水蒸気をあわせて湿潤大気 (moist air) と呼ぶ。

水蒸気量は乾燥大気と比べて非常に少ない。乾燥大気の密度を ρ_d 、水蒸気の密度を ρ_v とすると、湿潤大気の密度は $\rho = \rho_d + \rho_s$ となる。水蒸気の密度と湿潤大気の密度の比 $q_v = \rho_v / \rho$ を比湿 (specific humidity) と呼ぶ。 ρ は典型的に 1 kg/m^3 で、 ρ_v は典型的に 10 g/m^3 程度以下であるので、 q_v は典型的に 0.01 程度以下の小さい値になる。

雲の力学過程の基礎方程式は、乾燥大気と水蒸気から成る 2 成分流体の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を、 q_v が小さいとして近似した物である。以下結果だけ示すが、詳しくは Holton (2004) や Houze Jr. (1994) をあたると良い。

4.2 状態方程式

湿潤大気は理想気体であるとするとその状態方程式は、

$$P = \rho R_d T. \quad (4)$$

ここで、 P は湿潤大気的气圧、 $R_d = 287 \text{ J/kg/K}$ は乾燥大気の比気体定数、 T は気温。

今、 $q_v \ll 1$ として水蒸気を無視したが、 T の代わりに仮温度 (virtual temperature) $T_v \simeq (1 + 0.61q_v)T$ を使う事で考慮できる。

4.3 運動方程式

運動量の保存則から以下を得る.

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -\nabla P - (\rho + \rho_w)\mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (5)$$

$$\rho_w(\mathbf{x}, t) := \sum_{i=1}^{N_r} m_i(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (6)$$

ここで, \mathbf{U} は風速, $D/Dt := \partial/\partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla$ は物質微分, \mathbf{g} は重力定数, $\boldsymbol{\tau}$ は粘性応力テンソル, ρ_w は粒子の密度 (大気単位体積あたりの質量), m_i は i 番目の粒子の質量. ここでも $q_v \ll 1$ として水蒸気の効果は無視した.

粘性が効く長さスケールである Kolmogorov マイクロスケールは大気の場合 1 mm 程度である. 一方雲の大きさは小さくても 1 km 位であり, 直接計算 (Direct Numerical Simulation, DNS) により分子粘性の効果を取捨する事は現状不可能である. 代わりにもっと粗い解像度で数値計算を行い, 再現できない格子スケール以下の小さな渦からの寄与は乱流モデルで表すのが通常である (藤吉康志, 2008).

ρ_w の項は粒子群が大気流体場から受け取った運動量の反作用である. ただし, これは終端速度の時間変化が遅い事を仮定した近似的な物である. 厳密な表現も簡単に導出できる.

また, 地球の自転が効いてくる様な現象を扱う時はコリオリ力も考慮しなければならない.

4.4 エネルギー方程式

エネルギーの保存則から以下を得る.

$$\frac{D\theta}{Dt} = -\frac{L}{c_p \Pi} S_v + \nabla \cdot \mathbf{H}, \quad (7)$$

$$S_v(\mathbf{x}, t) := \frac{-1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{i=1}^{N_r} \frac{dm_i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (8)$$

ここで, $\theta := T(P_0/P)^k$ は温位 (potential temperature) で $c_p \log \theta$ がエントロピーとなる様な量である. ただし, $P_0 = 100$ kPa, $k = (c_p - c_v)/c_p$, c_p は乾燥大気の定圧比熱で 1005 J/kg/K, c_v は乾燥大気の定積比熱で 718 J/kg/K. また, 右辺の第一項は水蒸気が粒子に凝結/蒸発する時に放出する潜熱を表す. L は水の蒸発潜熱, S_v は単位時間あたりに粒子群から蒸発した水の量. \mathbf{H} は分子粘性による発熱と熱伝導の項であるが, 乱流モデルを使う場合この効果はあらわには扱えない. ここでも $q_v \ll 1$ として水蒸気の効果は, 凝結/蒸発に伴う潜熱のやり取り以外無視している.

潜熱のやりとり, 粘性発熱や熱伝導が無いと, エントロピーが保存する, つまり断熱過程である事がこの方程式から読み取れる.

4.5 連続方程式

質量の保存則より以下を得る.

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (9)$$

$$\frac{Dq_v}{Dt} = S_v. \quad (10)$$

q_v の一次まで考えると上式を得る. S_v の項により粒子群との水蒸気のやりとりが表現されている.

4.6 コメント

以上で雲力学過程の基礎方程式が得られた. ただしこれらの方程式は bulk のふるまいを説明しているだけである. 実際には境界条件をどう与えるか, 例えば地面や海面とどう相互作用するかも重要である. また, 今回大気を水蒸気と乾燥大気の2成分の流体とみなしたが, 二酸化硫黄が酸化して硫酸エアロゾルが核生成する様なプロセスを再現したい場合は, 二酸化硫黄やその関連化合物の移流と化学反応も考慮しなければならない.

5 おわりに

以上で, 式 (1)-(10) の通り, 雲のふるまいを割と正確に表す基礎方程式系が得られた.

雲力学過程のシミュレーションについては, 直接計算は依然難しいものの, コンピューターの進歩もあって, 乱流モデルを使う事である程度計算ができるようになってきている (藤吉康志, 2008).

これに対し, 雲微物理過程にはまだ確立された数値計算の手法が存在しない. 雲は 1 m^3 あたりざっと数億個程度のおびただしい数の粒子により構成されており, これを直接計算することは不可能である. どうかうまく粗視化して近似的に計算しようという事になるわけだが, その一つの方法論が超水滴法である. そのアイディアは単純で, 大きさや化学組成について状態の似た多数の実粒子を超水滴という仮想計算粒子で表現する. 超水滴は実粒子集団の重み付き標本であるとも解釈できる. 衝突併合により標本数が減らないように工夫したり, 計算コストを $O(N)$ と粒子数に比例する程度に抑えてある所が計算手法として新しい所である (Shima *et al.*, 2009).

参考文献

Beard KV. 1976. Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft. *J. Atmos. Sci.* **33**: 851–864, doi:10.1175/1520-0469(1976)033<0851:TVASOC>2.0.CO;2.

- Chen L, Goto S, Vassilicos J. 2006. Turbulent clustering of stagnation points and inertial particles. *J. Fluid Mech.* **553**: 143–154, doi:10.1017/S0022112006009177.
- Davis MH. 1972. Collisions of small cloud droplets: Gas kinetic effects. *J. Atmos. Sci.* **29**: 911–915, doi:10.1175/1520-0469(1972)029<0911:COCDG>2.0.CO;2.
- Falkovich G, Fouxon A, Stepanov MG. 2002. Acceleration of rain initiation by cloud turbulence. *Nature* **419**: 151–154, doi:10.1038/nature00983.
- Gillespie DT. 1972. The stochastic coalescence model for cloud droplet growth. *J. Atmos. Sci.* **29**: 1496–1510, doi:10.1175/1520-0469(1972)029<1496:TSCMFC>2.0.CO;2.
- Gunn R, Kinzer GD. 1949. The terminal velocity of fall for water drops in stagnant air. *J. Meteor.* **6**: 243–248.
- Hall WD. 1980. A detailed microphysical model within a two-dimensional dynamic framework - model description and preliminary-results. *J. Atmos. Sci.* **37**: 2486–2507, doi:10.1175/1520-0469(1980)037<2486:ADMMWA>2.0.CO;2.
- Holton JR. 2004. *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press, 4th edn.
- Houze Jr RA. 1994. *Cloud dynamics*. Academic Press.
- Jonas PR. 1972. Collision efficiency of small drops. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **98**: 681–683, doi:10.1002/qj.49709841717.
- Köhler H. 1936. The nucleus in and the growth of hygroscopic droplets. *Trans. Faraday Soc.* **32**: 1152–1161, doi:10.1039/TF9363201152.
- Low RDH. 1969. A generalized equation for the solution effect in droplet growth. *J. Atmos. Sci.* **26**: 608–611, doi:10.1175/1520-0469(1969)026<0608:AGEFTS>2.0.CO;2.
- Onishi R, Matsuda K, Takahashi K, Kurose R, Komori S. 2011. Linear and nonlinear inversion schemes to retrieve collision kernel values from droplet size distribution change. *Int. J. Multiphase Flow* **37**: 125–135, doi:10.1016/j.ijmultiphaseflow.2010.10.004.
- Pruppacher HR, Klett JD. 1997. *Microphysics of clouds and precipitation*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 2nd rev. and enl. edn.
- Rogers RR, Yau MK. 1989. *A short course in cloud physics*. Pergamon Press: Oxford, third edn.
- Seinfeld JH, Pandis SN. 2006. *Atmospheric chemistry and physics - from air pollution to climate change*. John Wiley & Sons, 2nd edn.

Shima S, Kusano K, Kawano A, Sugiyama T, Kawahara S. 2009. The super-droplet method for the numerical simulation of clouds and precipitation: a particle-based and probabilistic microphysics model coupled with a non-hydrostatic model. *Q.J.R. Meteorol. Soc.* **135**: 1307–1320, doi:10.1002/qj.441.

小倉義光. 1999. **一般気象学**. 東京大学出版会, 2nd edn.

藤吉康志 (ed). 2008. **気象研究ノート 第 219号 - ラージ・エディ・シミュレーションの気象への応用と検証**. 日本気象学会.