

量子力学の基礎に関する最近の話題

筒井 泉

高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所

概要

20世紀末からの量子情報科学の勃興と実験技術の著しい発展に触発され、今世紀になって実験的にも理論的にも量子力学の基礎に関する考察が深められ、新たな進展が次々に報告されている。この予稿では、まずその基盤となるアインシュタイン・ボーア論争以来の量子力学の基礎問題の核心に触れた後、これに関連して提出されたベル不等式の意義とその検証実験の現状を簡単に説明する。その上で、最近、話題になった波動関数の実在論的解釈に関する定理を紹介し、さらに近年、新たな物理量として精力的に研究されているアハロノフの弱値とその測定方法について解説する。

1. はじめに

近年の量子情報科学の著しい進展とともに、量子状態の制御や精密測定の実用性が高まっており、最近では、熱力学第二法則を通じた量子情報と熱力学との関係や、不確定性関係の一般化や量子推定による見直しなども行われている。このような状況の中で、情報科学との関係だけでなく、物理学においても量子力学を取り巻く環境が急激に変化し、その基礎をより深く理解することが求められるようになってきた。この講義では、量子力学の基礎に関する基礎知識を得るために、アインシュタイン・ボーア論争以来、量子力学のいったい何が問題とされて来たのか、またそれらは現在ではどのように考えられているのかについて、アインシュタインがポドルスキー、ローゼンと共著で発表した EPR 論文の提議した問題、ベル不等式とその検証、そして最近のピュージー、バレット、ルドルフによる PBR 定理の概要を通して解説する。加えて、近年、新しい物理量として話題となっているアハロノフの弱値と、その測定手段である弱測定及びその精密測定への応用にも触れて、状態と物理量という量子力学における 2つの中心概念に対する考え方の現状を紹介したい。

2. EPR 論文：量子力学は完全か

量子力学建設における貢献者の一人であったアインシュタインは、量子力学の解釈を廻ってボーアと鋭く対立し、ソルベイ会議などを通して論争を繰り広げたことは良く知られている。当初は不確定性関係の解釈を廻るものであり、論争はボーアの優位に推移したが、後にアインシュタインは戦略を変えて量子力学の不完全性を攻撃の対象とした。この目的で執筆されたものが、1935年の『量子力学の物理的実在の記述は完全だろうか?』と題した EPR 論文 [1] であるが、これは波動関数（量子状態）の意味に関する根幹的な疑問を提示したものとして、今日に至るまでその重要性を失っていない。まずはこの EPR 論文の議論の梗概を述べることにしよう。

量子力学が不完全であることを論証するためには、その前提として、完全な物理理論とは何かということを定義する必要がある。EPR 論文では、これを

- 物理理論の完全性 すべての物理的実在の要素に対応するものが、物理理論の中にあること

と定め、その「物理的実在」については、

- 物理的実在 もし対象の状態をまったく乱さずに、ある物理量の値を確実に（100%の確率で）予言できるとき、その物理量に対応する物理的実在の要素がある

ことが十分条件であると規定した。もし物理量の値を確実に予言できなければ、その値が定まっているとは言えないのだから実在の要素があるとは言い難いだろうし、またその予言を行うための測定が対象の状態を乱してしまうならば、その実在性を想定することができないというのが、上の物理的実在の条件の根柢にある理由だと考えられる。EPR はこれらの条件の下で、量子力学の記述する「量子もつれ状態」が、物理的実在の要素に忠実に対応するものではないことを論証する。以下ではこれを（後にボームの用いた）2個のスピンの1/2の粒子のスピンの1重項状態を使って説明しよう。

いま $|+z\rangle$ 、 $|-z\rangle$ をそれぞれスピンの z 成分（の $\hbar/2$ の単位）の固有値 $+1$ 、 -1 の固有状態 $\hat{\sigma}_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$ とする。2個の粒子をそれぞれ1, 2とラベルをつけて区別することとし、それらの1重項状態

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+z\rangle_1|-z\rangle_2 - |-z\rangle_1|+z\rangle_2) \quad (1)$$

を準備する。（なお、電子のような同種粒子を用いる場合は、2個が離れて存在し、そのスピンの値を測定する測定器の種類（右か左かなど）によって区別をつける。）この2個の粒子を互いに遠く引き離し、一方に対する測定を含めた如何なる操作の影響も、他方に瞬時には及ばないようにしよう。例えば粒子1を地球上に置き、粒子2を約239万光年離れたアンドロメダ銀河に置くとすれば、測定の影響はその伝播速度が光速を超えない限り、到達に239万年以上かかることになる。

量子力学によれば、1重項状態 $|\psi_S\rangle$ に対して地球上で粒子1のスピンの z 成分を測定した場合には等確率で測定結果 ± 1 を得ることになるが、その際に $|\psi_S\rangle$ が状態収縮（state reduction）を起こし、測定結果 ± 1 に応じて $|+z\rangle_1|-z\rangle_2$ または $|-z\rangle_1|+z\rangle_2$ に「瞬時に」変化することになる。従って、例えば地球上の粒子のスピンの z 成分の値が $+1$ であれば、アンドロメダ銀河の粒子のスピンの z 成分は必ず -1 でなければならず、逆に地球上で -1 ならば、アンドロメダでは $+1$ であることが確実となる。つまり、地球上の粒子のスピンの z 成分の測定結果から、確実にアンドロメダ銀河の粒子のスピンの z 成分の値を予言することができることになる。しかも、地球上の測定はアンドロメダ銀河の粒子には、少なくとも瞬時には何ら影響を与えないと考えられるから、上の「物理的実在」の定義により、アンドロメダ銀河の粒子のスピンの z 成分は物理的実在の要素だと見なされる。

ところが、式(1)の1重項状態のような量子もつれ状態（entangled state）は、全系の状態は確定していても部分系の状態は確定していないという、古典系の状態にはあり得ない顕著な特

徴を持つ。実際、1重項状態は各粒子のスピンの成分は確定した値を持たず、それゆえ、 z 成分の固有状態の代わりに例えば x 成分の固有状態 $|\pm x\rangle := (\pm|+z\rangle + |-z\rangle)/\sqrt{2}$ を用いて

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+x\rangle_1 |-x\rangle_2 - |-x\rangle_1 |+x\rangle_2) \quad (2)$$

と書き直すことも可能である。その結果、もし地球上でスピンの x 成分を測ったとしても、 z 成分の時と同様に、その測定結果によってアンドロメダの粒子の x 成分の値を確実に予言できることになる。従って同じ議論により、アンドロメダの粒子の x 成分もまた物理的実在の要素だと見なされる。

どの方向のスピンを測定するかは地球上の測定者の自由な選択であり、アンドロメダの粒子の与り知らぬことであるから、結局、アンドロメダの粒子のスピンは、 z 成分も x 成分も同時に物理的実在でなければならないことになる。ところが、量子力学によれば、1個の粒子のスピンの異なる成分は同時測定できず、それらに確定した値を定めることができない。上の例で言えば $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x] \neq 0$ だから $\hat{\sigma}_z$ と $\hat{\sigma}_x$ の同時固有状態は存在せず、実在量である筈の z 成分と x 成分の値を確実に予言することができない。すなわち、上の「物理理論の完全性」の条件に合致せず、量子力学は物理理論として完全なものとは言えない。これが、EPRの主張する量子力学の不完全性である。

このEPRの論証には、2つの暗黙の仮定が含まれている。その1つは、遠距離に離れた2粒子の間で、一方の粒子の測定が瞬時に他方の粒子に何の物理的影響を与えないという局所性 (locality) であり、もう一つは測定者が物理系とは無関係に自由に測定の実行ができるという選択の自由 (freedom of choice)、言い換えれば測定者が自由意思 (free will) を持つことである。なお、上の例では物理量の実在性 (reality) は、局所性の前提から導かれたことに注意したい。これらの前提を詳しく吟味することが、次のベル不等式での議論に繋がって行く。

3. ベル不等式とその検証：実在性と局所性

1964年にベルがEPRの論証を吟味し、その正否が単なる思考実験ではなく、実際に検証可能な形の議論に発展させた [2]。それがベル不等式として知られる内容であるが、その説明の前に、アインシュタインの立場を明確にしておくことにしよう。EPR論文で結論づけたように、アインシュタインは量子力学が完全な理論ではなく、実在を記述する完全な理論は (少なくとも原理的には) 別に存在すべきものであり、量子力学はそのような理論の統計的な近似理論に過ぎないのではないかと考えていた。そのような完全な理論は実在の要素を完全に記述できるものであるが、現時点ではその内容が不明であり、その理論における物理的状态を記述する (実在の要素に対応する) 変数を知ることができないので、それは「隠れた変数」と呼ばれ、またその理論は隠れた変数の理論 (hidden variable theory) と一般に呼称される。

今、その隠れた変数を集合的に λ で表すことにすれば、 λ が決まればその値によって実際の測定で得られる物理量の測定結果は完全に指定されることになる。従って、いま A を測定を行う物理量だとすれば、その測定値は λ の関数として $A(\lambda)$ と書くことができる。量子力学において

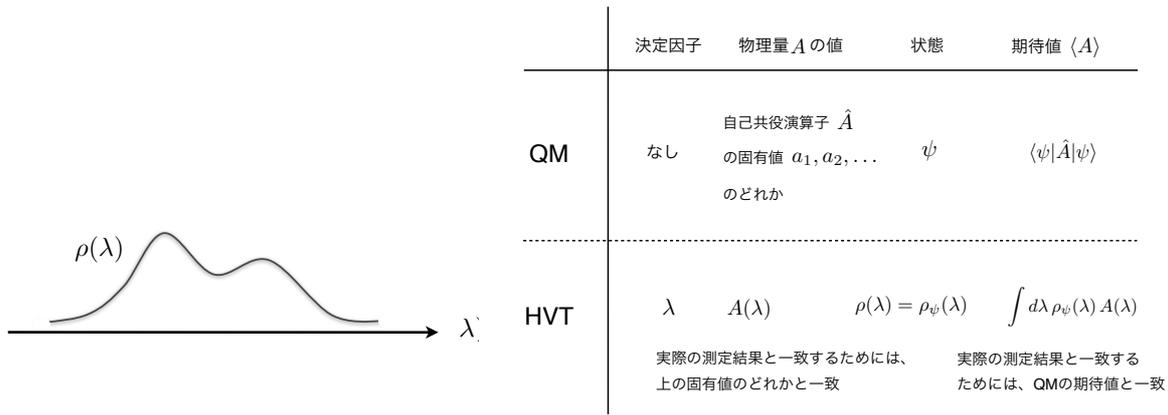


図1 隠れた変数の理論における状態は、隠れた変数 λ の分布関数 $\rho(\lambda)$ によって規定される (左)。量子力学 (QM) と隠れた変数の理論 (HVT) における決定因子、物理量、状態、期待値の対応表 (右)。実際の測定結果を再現するためには、隠れた変数の理論での物理量 $A(\lambda)$ は量子力学における \hat{A} の固有値のどれかと一致しなければならない。また分布関数 $\rho(\lambda)$ も、物理量 A の期待値が量子力学におけるものと一致するものでなければならない。

不完全にしか実在の要素を記述できない量子状態 ψ を定めることは、隠れた変数の理論側から見ればその状態に対応した λ の分布 $\rho_\psi(\lambda) \geq 0$ を定めることに等しい。この分布は統計的なものであり、規格化されている $\int d\lambda \rho_\psi(\lambda) = 1$ ものとする。このような統計的な意味で、隠れた変数の理論は量子力学の結果を再現するものと想定され (図1)、例えば物理量 A の測定結果の期待値 $\langle A \rangle$ は、対応する量子力学での自己共役演算子 \hat{A} とすれば、両者で

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int d\lambda \rho_\psi(\lambda) A(\lambda) \tag{3}$$

という等式が成立し、このとき $A(\lambda)$ は \hat{A} の固有値の一つを取る (測定値は固有値で与えられるから)。特に A が特定の状態 $|\phi\rangle$ にあるかどうかの ‘Yes-No’ 型の測定実験の場合、これに対応する射影演算子は $\hat{A} = |\phi\rangle\langle\phi|$ であり、その固有値から測定値は $A(\lambda) = 0, 1$ となる。このとき、上式は確率 $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ を与える。

さて EPR の想定した遠く離れた 1 重項状態にある 2 粒子に対して、それぞれのスピンを測定することを考える。スピンのどの成分を測定するかは、測定者が自由に選択できるものとし、粒子 1、2 のスピン測定方向をそれぞれ \vec{a} 、 \vec{b} とする。もし EPR の言うようにそれらのスピン成分がともに実在のものならば、その値は隠れた変数の理論では決まっていなければならない。それらを $A(\vec{a}, \lambda)$ 、 $B(\vec{b}, \lambda)$ と書くことにすれば、スピンであることより、これらの値は $A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1$ 、 $B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1$ のどれかになる。測定をそれぞれの粒子に対して 2 種類、 \vec{a}, \vec{a}' 、 \vec{b}, \vec{b}' ずつ行うことにすれば、全部で 4 種類の組み合わせができる。それらを次のように組み合わせると (と差) を作ると次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} & A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) + A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}', \lambda) + A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}', \lambda) B(\vec{b}', \lambda) \\ &= A(\vec{a}, \lambda) (B(\vec{b}, \lambda) + B(\vec{b}', \lambda)) + A(\vec{a}', \lambda) (B(\vec{b}, \lambda) - B(\vec{b}', \lambda)) = \pm 2. \end{aligned} \tag{4}$$

なぜなら、 $B(\vec{b}, \lambda) + B(\vec{b}', \lambda)$ と $B(\vec{b}, \lambda) - B(\vec{b}', \lambda)$ のうち、必ず一方が0、他方が ± 2 となるから。さてある状態 ψ のもとで2粒子に対するスピンの測定を行ったとき、その相関は隠れた変数の理論では

$$\langle A(\vec{a})B(\vec{b}) \rangle = \int d\lambda \rho_\psi(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \quad (5)$$

で与えられる。このことより、等式(4)から相関の組み合わせに対する不等式

$$\left| \langle A(\vec{a})B(\vec{b}) \rangle + \langle A(\vec{a})B(\vec{b}') \rangle + \langle A(\vec{a}')B(\vec{b}) \rangle - \langle A(\vec{a}')B(\vec{b}') \rangle \right| \leq 2 \quad (6)$$

を得る。これがベル不等式（あるいは後に改訂版を提出した論文著者の頭文字から CHSH 不等式 [3]）と呼ばれるものである。もし量子力学の背後に、アインシュタインの示唆するような隠れた変数の理論が存在するとすれば、任意の量子状態に対してその相関は上のベル不等式(6)を満足する筈である。

ところが量子力学によれば、1重項状態のときの2粒子のスピンの相関は測定方向 \vec{a} 、 \vec{b} 間の角度を θ_{ab} とすると

$$\langle A(\vec{a})B(\vec{b}) \rangle = \langle \psi_S | (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})_1 \otimes (\vec{b} \cdot \vec{\sigma})_2 | \psi_S \rangle = -\cos \theta_{ab} \quad (7)$$

と計算される。簡単のため、全ての測定方向を一つの平面内に $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \theta$ と取って、その際のベル不等式(6)の左辺を $S(\theta)$ と置こう。量子力学の場合の左辺 $S(\theta)$ を上の相関から求め、その上で不等式を書くと

$$S(\theta) = |3 \cos \theta - \cos 3\theta| \leq 2 \quad (8)$$

となるが、これは例えば $\theta = \pi/4$ のとき $S(\pi/4) = 2\sqrt{2}$ となって明らかに矛盾する。すなわち、量子力学の予言するところと、隠れた変数の理論の存在は両立しない。

ベル不等式の実験的検証は主に70年代から光子を用いて行われたが、80年代初めのアスペの実験が良く知られている [4]。その後、検証の対象が拡大されて質量のある ${}^9\text{Be}^+$ イオンや陽子、さらに最近では K や B 中間子などを用いても行われている。その結果は、何れも量子力学の予言を支持し、隠れた変数の理論の存在を否定するものになっている (図2)。

果たして実験的検証によって否定されたのはどのような物理的要請だろうか。これを吟味するために、もう一度ベル不等式を導いたときの前提を振り返ると、まず隠れた変数の理論を想定していることから、物理量の实在性が当然の前提となっている。その上、測定値 $A(\vec{a}, \lambda)$ 、 $B(\vec{b}, \lambda)$ が各々の粒子の測定方向にしか依らず、他方の粒子の測定方向には依存しない (例えば $A(\vec{a}, \vec{b}, \lambda)$ となっていない) ことが前提となっており、これは EPR 論文での局所性の要請に対応するものである。加えて、EPR 論文と同様に、測定者の選択の自由が暗黙に仮定されており、これは測定値 $A(\vec{a}, \lambda)$ 、 $B(\vec{b}, \lambda)$ がそれぞれ任意の \vec{a} 、 \vec{b} に対して存在する (すなわち \vec{a} 、 \vec{b} が隠れた変数 λ とは独立な変数であり、これらをどのように指定しても、任意の λ に対して測定値が存在する) という形で表されている。従って、検証実験によって否定されたのは、实在性、局所性、選択の自由の3つのうちの少なくとも1つであると言える。例えば局所的のみを否定し、实在

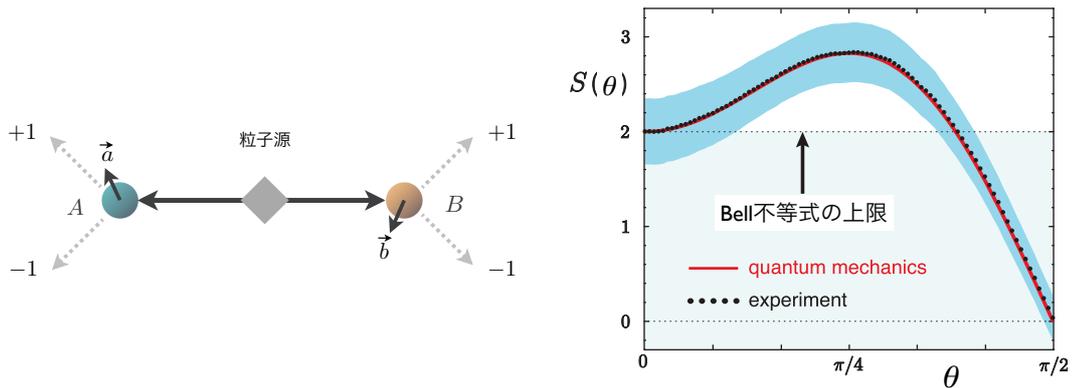


図2 ベル不等式の検証実験。(左) 量子もつれさせた2粒子を左右に引き離して、それぞれのスピンを測定してその相関を測る。(右) 陽子を用いた最近の実験結果 [5]。実線は量子力学の予言 (8)、点線は測定結果。実験は良く量子力学の予言を再現しており、隠れた変数の理論による上限値 2 を明らかに越えている。

性と選択の自由を保持することが可能である。つまり、非局所的実在論はベルの不等式検証実験によって否定されていない。

また実験自体の詳細な検討も必要である。厳密に言えば、実験でベル不等式が前提とした局所性を担保するためには、2つの粒子の間隔が十分に離れていて、一方の測定操作が他方の測定に絶対に影響を与えないことが保障されなければならない。しかし従来の実験ではこれが必ずしも十分に保障されているとは言えず、局所性の抜け穴 (locality loophole) と呼ばれている。もう一つの問題は、測定効率に関するものである。例えば光子を検出する場合にはその検出効率は100%よりもかなり低く、測定値の相関の算定の際にそのような非検出のデータを除外しても、果たして正しい相関が得られるかという疑問が生じる。非検出の場合を考慮に入れば全体としての相関が変化し、その結果、ベル不等式が破れない可能性が残るからである。これが検出効率の抜け穴 (efficiency loophole) として知られる問題であり、このため、相関の算定には検出されたデータが、非検出のものを含めた全体のデータを公平に反映するものになっているという公平抽出性 (fair sampling) の仮定が必要となる。局所性の抜け穴と検出効率の抜け穴の両者を塞いだ完璧な検証実験は、現在に至るまで実現していない。なお光子を用いた実験では、これらを個別に塞ぐことが可能であることが最近報告されている [6]。

4. PBR 定理：波動関数の意味

ベル不等式の成立には局所性の前提が重要な鍵となっているが、量子もつれ状態のように各部分系間に相関が実現されているような状況で、果たして局所性を前提とすることが正当かどうかについては議論が分かれる。昨年、ピュージーらは隠れた変数の理論における局所性を前提とせず、その代わりに量子もつれしていない状態に対する独立性のみの要請という緩い前提に基づいて、量子状態と隠れた変数の関係を規定する定理 (共著者の頭文字から PBR 定理と呼ばれる) を提出した [7]。彼らの目的は、隠れた変数の理論なるものが存在する場合に、量子力学の波

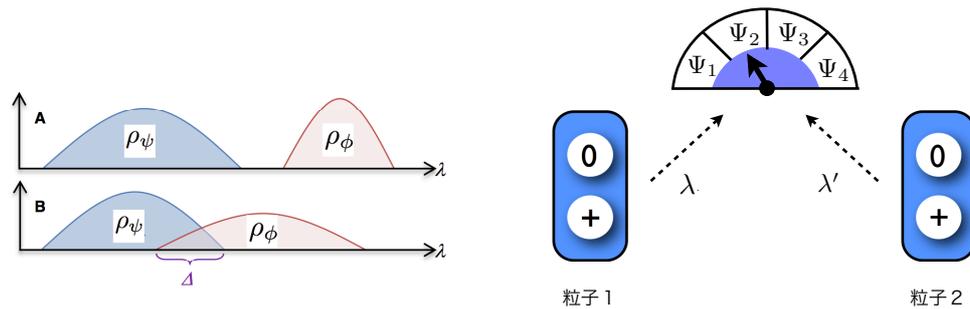


図3 PBR 定理の状況設定。(左) 2つの異なる波動関数 ψ , ϕ の分布関数 $\rho_\psi(\lambda)$, $\rho_\phi(\lambda)$ に重なり Δ がないか (A) あるか (B) によって、波動関数の意味が異なる。(右) 2つの粒子それぞれに $|0\rangle, |+\rangle$ の状態を用意し、その4種類の組み合わせが状態 $|\Psi_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3, 4$) のどれにあるかを判定する測定実験を行い、その結果と量子力学の予言を比較して、分布関数の重なり Δ の有無を判定する。

動関数によって表現されるものは、測定による状態収縮が示唆するように、測定者の系に関する知識を表すものに過ぎないのか、それとも何らかの実在に対応するものであるかを、明確にすることにあった。言い換えれば、波動関数は主観的な情報を表すものか、それとも客観的な実在を反映したものかという根源的な問いに対する答である。

精確に言えば、2つの異なる量子状態 ψ , ϕ が与えられたとき、それらに対応する分布関数 $\rho_\psi(\lambda)$, $\rho_\phi(\lambda)$ にもし重なる領域 Δ があれば、そのような領域中の λ で表される一つの実在に対応する波動関数は ψ , ϕ のどちらでも良いことになる (図3)。逆に、もし任意の異なる2つの波動関数の分布関数に重なり Δ がなければ、波動関数は (一群の) 実在に対する表現として一意に定まる。前者の場合は波動関数には紛れのない実在が対応せず、主観的な情報を表すものと考えられ、後者の場合は客観的な実在を表すものと見なせるだろう。PBR 定理は、前者が量子力学の結果と矛盾するという no-go 定理であり、従って後者の可能性のみが残される。彼らの議論は巧妙なものであるが、その本質は比較的単純であるので、それを紹介しよう。

前章までの例と同様に、2つの状態 $|0\rangle, |1\rangle$ を持つ粒子を2個用意し、 $|\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ とする。これらから、分布関数の重なりを考察すべき1粒子の状態として2つの状態を選んで

$$|\psi\rangle = |0\rangle, \quad |\phi\rangle = |+\rangle \quad (9)$$

としよう。上の2状態 (9) は、異なるが直交していない ($\langle\phi|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}$) という意味で、一般の状況を考えるのに役立つ。さて2個の粒子の状態は互いに独立に状態を準備できるとしよう。そのような独立な状態は量子もつれがなく、量子力学ではそれぞれの直積状態で表される。一方、隠れた変数の理論では、各々の粒子の実在に対応する隠れた変数を λ, λ' とすれば、独立性により粒子1の状態 ψ, ϕ に分布関数 $\rho_\psi(\lambda), \rho_\phi(\lambda)$ が、また粒子2の状態 ψ, ϕ に分布関数 $\rho_\psi(\lambda'), \rho_\phi(\lambda')$ が割り当てられることになる。

いま、それぞれの粒子が上の $|\psi\rangle, |\phi\rangle$ のどちらかの状態にあるとすれば、全体としては4種

類の状態

$$|\psi\rangle_1|\psi\rangle_2 = |0\rangle_1|0\rangle_2, \quad |\psi\rangle_1|\phi\rangle_2 = |0\rangle_1|+\rangle_2, \quad |\phi\rangle_1|\psi\rangle_2 = |+\rangle_1|0\rangle_2, \quad |\phi\rangle_1|\phi\rangle_2 = |+\rangle_1|+\rangle_2, \quad (10)$$

があり得る。これらを測定によって判別するため、2粒子系の状態の直交基底系として

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2), & |\Psi_2\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|-\rangle_2 + |1\rangle_1|+\rangle_2), \\ |\Psi_3\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|1\rangle_2 + |-\rangle_1|0\rangle_2), & |\Psi_4\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2), \end{aligned} \quad (11)$$

を選び、上の状態 (10) がこれらの4つのどの状態にあるかを測定によって判別することを考える。量子力学ではこれらに対応する射影演算子は $\hat{A}_i = |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$ で与えられ、4状態が基底系であることよりそれらの和は恒等演算子

$$\sum_{i=1}^4 \hat{A}_i = I \quad (12)$$

となり、これは測定の完全性を表す。上の状態 (10) のうち、例えば $|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2$ が $|\Psi_3\rangle$ に見つかる確率は

$$\text{Prob}(|\Psi_3\rangle; |\psi\rangle_1|\phi\rangle_2) = ({}_1\langle\psi|_2\langle\phi| \hat{A}_3 (|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2) = |\langle\Psi_3|(|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2)|^2 \quad (13)$$

で与えられる。興味深いことに、この4状態を用いて測定実験を行うと、必ず状態 (10) のどれかの確率がゼロとなることが、容易に確かめられる。すなわち、

$$|\langle\Psi_1|(|\psi\rangle_1|\psi\rangle_2)|^2 = |\langle\Psi_2|(|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2)|^2 = |\langle\Psi_3|(|\phi\rangle_1|\psi\rangle_2)|^2 = |\langle\Psi_4|(|\phi\rangle_1|\phi\rangle_2)|^2 = 0 \quad (14)$$

となるのである。実はこのようになるように、基底系 (11) を選んだのであった。

一方、隠れた変数の理論の側では、これらに対応する測定値は $A_i(\lambda, \lambda') = 0, 1$ のどちらかの値を取り、それぞれの値 '0' と '1' は (隠れた変数が λ, λ' のときに) 状態が $|\Psi_i\rangle$ であるかどうかの判定結果、すなわち 'Yes' と 'No' とに対応する。測定が基底系を用いて行われていることより、任意の λ, λ' の組の下で $i = 1, 2, 3, 4$ のうちのどれか一つの測定結果が1であり、残りは0でなければならない。このことより

$$\sum_{i=1}^4 A_i(\lambda, \lambda') = 1 \quad (15)$$

が導かれるが、これはちょうど量子力学での測定の完全性条件 (12) に対応する。粒子の独立性より、全体の分布関数は各粒子の分布関数の積で与えられるから、例えば $|\psi\rangle_1|\phi\rangle_2$ が $|\Psi_3\rangle$ に見つかる確率 (13) は、隠れた変数の理論では

$$\text{Prob}(|\Psi_3\rangle; |\psi\rangle_1|\phi\rangle_2) = \int d\lambda d\lambda' \rho_\psi(\lambda) \rho_\phi(\lambda') A_3(\lambda, \lambda') \quad (16)$$

によって与えられる。このことより、特に (14) の 4 つの場合について量子力学が予言する確率と一致するためには、

$$\begin{aligned} \int d\lambda d\lambda' \rho_\psi(\lambda)\rho_\psi(\lambda') A_1(\lambda,\lambda') &= 0, & \int d\lambda d\lambda' \rho_\psi(\lambda)\rho_\phi(\lambda') A_2(\lambda,\lambda') &= 0, \\ \int d\lambda d\lambda' \rho_\phi(\lambda)\rho_\psi(\lambda') A_3(\lambda,\lambda') &= 0, & \int d\lambda d\lambda' \rho_\phi(\lambda)\rho_\phi(\lambda') A_4(\lambda,\lambda') &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

が成立しなければならないことがわかる。これは、もし $\rho_\psi(\lambda)\rho_\psi(\lambda') > 0$ ならば $A_1(\lambda,\lambda') = 0$ であることを意味し、他の 3 つの場合も同様である。

さてここで、波動関数 ψ 、 ϕ の分布関数 $\rho_\psi(\lambda)$ 、 $\rho_\phi(\lambda)$ に重なり Δ が存在すると仮定しよう。このとき、 $\lambda, \lambda' \in \Delta$ が存在するから、それらの組に対しては全ての分布関数の積は非ゼロ（正）の値を取る。すると上の議論から、そのような $\lambda, \lambda' \in \Delta$ に対しては、全ての $i = 1, 2, 3, 4$ で $A_i(\lambda, \lambda') = 0$ となるが、この結果は明らかに測定の完全性 (15) と矛盾する。従って、もし量子力学の予言が正しいものであれば、波動関数 ψ 、 ϕ の分布関数に重なり Δ が存在すると仮定したことが誤りであることになり、結局のところ、これらの量子状態は実在性の観点から歴然と区別できることになる。

上の考察は特別な 2 状態 (9) に対してのものであったが、同様の考察を $0 < \theta < \pi/2$ を用いたより一般的な 2 状態の組み合わせ

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad |\phi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle - \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (18)$$

に対しても行うことができる。いまその梗概のみを述べると、まず $2^{1/n} - 1 \leq \tan(\theta/2)$ を満たす十分に大きな整数 n を選び、上の例で用いた 2 個の粒子の代わりに n 個の粒子を用いて、2 状態の任意の組み合わせの直積状態を用意する。その上で、先に用意した 2 状態との間の確率振幅が、(17) と同様の直交条件を満たすようにうまく n 体系の基底状態の基底系を (11) に倣って構成する。すると上と殆ど同じ理屈によって、一般的な 2 状態 (18) に対してもそれらの波動関数 ψ 、 ϕ の分布関数に重なりが存在しないこと、

$$\rho_\psi(\lambda)\rho_\phi(\lambda) = 0 \quad (19)$$

が証明できるのである。この議論によって、もし量子力学の背後に隠れた変数の理論の名で呼ばれる完全な理論が存在するとしても、その統計的記述である量子力学の波動関数は、系に対する測定者の知識を表すようなものではなく、何らかの実在に対応するものであることになる。哲学的な用語を用いて言い換えれば、隠れた変数の理論から見た波動関数は認識論的なものではなく実在論的なものである。これが PBR 定理の主張であった。

5. 弱値：新しい物理量

ベルが不等式を提出した 1964 年に、アハロノフは量子力学を 2 つの量子状態によって再構成する試みを行った [8]。この再構成は量子力学の枠組を改変するものではないが、始状態と終

状態によって一つの量子過程が与えられた場合には、始状態のみによって規定される標準的な系の状態記述とは別の記述が可能であることを示したもので、新しい物理量の概念に繋がるものであった。この物理量は弱値 (weak value) と呼ばれ、通常の量子力学の物理量 (観測量) と異なり、一般に複素数値が許される [9]。弱値の意味については、80年代以降の一連の研究によって徐々に明らかになり、これを用いてハーディのパラドックスなどの分析がなされ、常識的には理解できない量子力学的現象の理解に、新たな視点をもたらすことになった。これと平行して、弱値を測定する方法である弱測定 (weak measurement) についても研究が進み、最近では弱値の増幅可能性を用いて、光の量子ホール効果などの精密測定に有用であることが明らかになるなど、応用上も注目されている。

アハロノフの弱値の考えは、次のような単純なスピン測定の思考実験により理解することができる。時刻 $t = t_0$ で粒子のスピン z 成分を測定し、 $\sigma_z = +1$ だったとしよう。すると始状態は $|+z\rangle$ であることになる。いま簡単のため、外部からの相互作用も粒子自身の自己相互作用も無視できる (全ハミルトニアン $\hat{H} = 0$) として、その後の時刻 $t = t_1$ に今度はスピンの x 成分を測定する。もしその結果 $\sigma_x = +1$ だったとすれば、系はその時刻には終状態として $|+x\rangle$ にあることになる。2度の測定によって $t = t_0$ で $\sigma_z = +1$ 、 $t = t_1$ で $\sigma_x = +1$ である特定の系を選んだことになるから、その意味からそれぞれの状態選択を事前選択 (preselection)、事後選択 (postselection) と呼ぶ。さてこのとき、中間時刻 $t_0 < t < t_1$ におけるそれぞれのスピン成分 σ_z 、 σ_x の値はどうなっているのだろうか。

まず z 成分 σ_z については、系に何ら変化がない筈だから時刻 t においても $\sigma_z = +1$ であると推定できる。それでは x 成分 σ_x についてはどうか。もし時刻 t において $\sigma_x = -1$ だったとすれば、その際には系は $|-x\rangle$ であつたと考えられるが (状態 $|+z\rangle$ は、それぞれ確率 $1/2$ で $|+x\rangle$ または $|-x\rangle$ にある)、これは系が $t = t_1$ で $\sigma_x = +1$ であつたことと矛盾する。なぜなら、仮に系が $|-x\rangle$ にあつたとすれば、それが $t = t_1$ で $|+x\rangle$ に見つかる確率はゼロだからである。従って、時刻 t においても系は $|+x\rangle$ であり、 $\sigma_x = +1$ を持つと推定される。つまり $t_0 < t < t_1$ において系は $\sigma_z = +1$ であり、かつ $\sigma_x = +1$ であると見ることができるのである。

このことは、始状態と終状態の2つの状態選択によって指定された量子系の状態記述は、選択を規定する2つの状態ベクトルによってなされるべきことを意味する。同時に、そのような特定の選択によって規定された系は、同時測定できない (交換しない) 物理量である σ_z と σ_x の両者にも確定した値を持たせる。当然ながら、もし時刻 t で '強く' 測定を行うならば、その途端に系を乱してしまうので、このような結論にはならない。ここではあくまで仮想的な意味での物理量を考察することにより上の結論を導いたが、ここで重要なことは、もし仮に殆ど系を乱さずに '弱く' 測定を行うことができれば、両者の物理量に確定した値が得られることが示唆されることである。この意味でこれらの物理量の値を「弱値」と呼ぶが、これは決して値そのものが '微弱である' ことを意味しない。

一般の量子系の場合に対しても、このような状態選択を行って始状態 $|\phi_i\rangle$ と終状態 $|\phi_f\rangle$ によって指定された量子過程を考えることができる。そしてその過程が実際に確率的に実現可能で

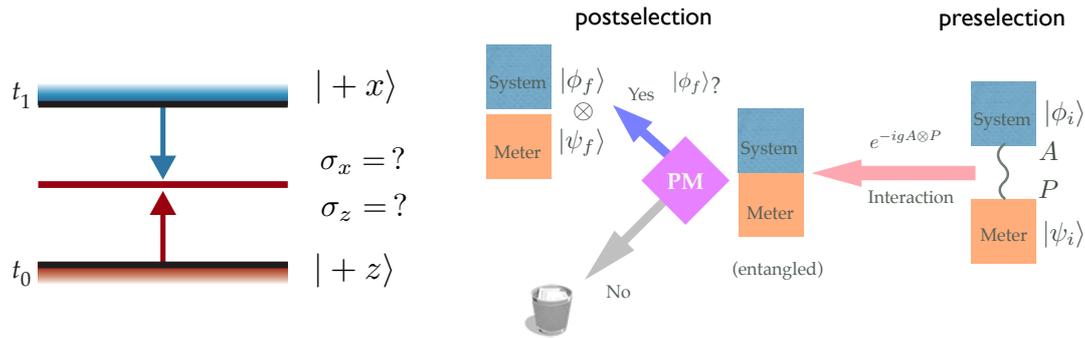


図4 (左) スピンの2つの成分 σ_z と σ_x は同時に値を持つか?... 実のところ、2度の状態選択によって定まる量子過程においては、同時測定可能ではない組に対しては確定した値を持つ。(右) 弱値を測定によって得るための弱測定のプロセス。標準的な(間接)射影測定と違い、選択をパスした場合のみ測定したデータを分析し、パスしない場合は棄てる。対象系と測定器(メーター)系との相互作用が弱いとき、メーターの針の振れ方の相互作用の強さへの依存性(微分)から弱値を得る。

ある場合 $\langle \phi_f | \phi_i \rangle \neq 0$ 、その過程における物理量 A の弱値は

$$A_w := \frac{\langle \phi_f | \hat{A} | \phi_i \rangle}{\langle \phi_f | \phi_i \rangle} \quad (20)$$

によって定義される。明らかに、もし2つの状態 $|\phi_i\rangle$ 、 $|\phi_f\rangle$ のどちらかが \hat{A} の固有状態のときは、 A_w はその固有値に等しい。先の例は $|\phi_i\rangle = |+z\rangle$ 、 $|\phi_f\rangle = |+x\rangle$ の場合であり、これらがそれぞれ $\hat{\sigma}_z$ 、 $\hat{\sigma}_x$ の固有状態であるから、その弱値は対応する固有値となる。また特に $|\phi_i\rangle = |\phi_f\rangle$ の場合には A_w はその状態の下での物理量の期待値に一致するから、その意味で弱値は期待値を一般化したものと見ることもできる。さて(20)によって定義された弱値は一般には複素数であり、またその値も2状態 $|\phi_i\rangle$ 、 $|\phi_f\rangle$ をうまく選ぶことによって、自由に変えることができる。通常の量子力学における物理量は特定の値(演算子の固有値)に限定され、またスピンのように演算子が有界の場合にはその値にも上限が存在するが、これに反して弱値には制限が全くないという著しい特徴がある。

そのような弱値を測定するには、次のようなプロセスを経る。まず通常の(間接)射影測定の場合と同じく測定器(メーター)系を用意して、物理量 A を持つ対象系とメーター系との間で相互作用させる。対象系、メーター系それぞれの始状態を $|\phi_i\rangle$ 、 $|\psi_i\rangle$ とし、 P をメーター系の物理量、 g を相互作用の強さを表すパラメーターとし、標準的な測定としてフォン・ノイマン型相互作用を考える：

$$|\phi_i\rangle |\psi_i\rangle \longrightarrow e^{-ig\hat{A} \otimes \hat{P}} |\phi_i\rangle |\psi_i\rangle. \quad (21)$$

通常の測定過程では、ここで正準交換関係 $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ を満たす(以後、簡単のため $\hbar = 1$ とする)メーター系の物理量 Q を選び、これを射影測定することによって物理量 A の値を読み取る。一方、弱値を測定するためには、上の相互作用の後で、事後選択を行うことが必要になる(図4)。すなわち、対象系が終状態 $|\phi_f\rangle$ になる場合のみを選んで、その時のメーター系の状態

$$|\psi_f\rangle = \langle \phi_f | e^{-ig\hat{A} \otimes \hat{P}} | \phi_i \rangle | \psi_i \rangle \quad (22)$$

に対する物理量 Q を測定するのである。もし相互作用の結合定数 g が十分に小さければ、

$$|\psi_f\rangle \simeq \langle \phi_f | I - ig\hat{A} \otimes \hat{P} | \phi_i \rangle | \psi_i \rangle = \langle \phi_f | \phi_i \rangle \left(1 - ig \frac{\langle \phi_f | \hat{A} | \phi_i \rangle}{\langle \phi_f | \phi_i \rangle} \hat{P} \right) | \psi_i \rangle \simeq \langle \phi_f | \phi_i \rangle e^{-igA_w \hat{P}} | \psi_i \rangle \quad (23)$$

となるが、ここで現れる A_w が式 (20) で定義された弱値である。メーター系の状態を、物理量 Q の‘座標表示’によって表現すれば、 \hat{P} はその座標空間の並行移動の生成子であるから、上式は

$$\psi_f(Q) := \langle Q | \psi_f \rangle \propto \psi_i(Q - gA_w) \quad (24)$$

を意味する。つまり、メーター系の始状態 $\psi_i(Q)$ が測定後に弱値 A_w に比例してシフトすることになる。

より厳密には、相互作用の前後の期待値 $E_Q(\psi) := \langle \psi | \hat{Q} | \psi \rangle / \|\psi\|^2$ の差

$$\Delta_Q^w(g) := E_Q(\psi_f) - E_Q(\psi_i) \quad (25)$$

を測定すると、その弱極限 $g \rightarrow 0$ での変化率は、物理量 Q 、 P 及びそれらから構成された演算子 $\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}$ に対応する物理量 $\{Q, P\}$ の期待値を使って

$$\frac{d}{dg} \Delta_Q^w(0) = \text{Re } A_w + [E_{\{Q, P\}}(\psi_i) - 2E_Q(\psi_i)E_P(\psi_i)] \cdot \text{Im } A_w \quad (26)$$

となることが示される。同様に P についても期待値の変化を測定すると、その変化率は P の分散 $\text{Var}_P(\psi_i) := E_{P^2}(\psi_i) - (E_P(\psi_i))^2$ を用いて

$$\frac{d}{dg} \Delta_P^w(0) = 2 \text{Var}_P(\psi_i) \cdot \text{Im } A_w \quad (27)$$

となる [10]。これらの結果、両式 (26)、(27) から弱値 A_w の実部と虚部を読み取ることができ、弱測定のプロセスが完了する。

このように弱極限 $g \rightarrow 0$ での変化率から弱値を得ることは、弱値そのものが対象系を殆ど乱さずに測定したときの物理量の値という概念と良く一致している。しかし、弱値を得るためには必ずしも上のような弱測定のプロセスを経ずとも、例えば g が十分に大きな場合にメーター系の状態に特別な制限を加えることで弱値を測ることができる。物理量としての弱値と測定相互作用の強度との関連はあくまで技術的なものであり、弱値は量子系の物理量として本質的な要素を持っていると考えられる。

先に述べたように、弱値 A_w は始状態 $|\phi_i\rangle$ と終状態 $|\phi_f\rangle$ をうまく選んで (20) の分母を小さくし、全体として‘増幅’することができるから、精密測定に有用になるものと期待される。例えば相互作用の強度 g を何らかの理由で大きくできない場合、通常の測定ではメーターの針の振れが十分でなく、その結果、測定精度が悪くなり、物理量の検出そのものが不可能になることもあるが、弱測定を用いて増幅した弱値を測定すればその検出が可能になる。測定の際に生じる種々の誤差（系統誤差、統計誤差、及び有限な強度 g に起因する非線形誤差）を詳細に考慮すると、

この増幅効果による精密測定には精度の上限が存在するが [10]、ここで述べたフォン・ノイマン型の弱測定ではなく、より一般的な弱値の測定方法の探索が今後の応用上の課題となっている。また弱値を物理量として概念的にどのように理解すべきかについても、未だ研究は緒についたばかりで、より深い研究が求められている。

6. おわりに

本稿では、EPR 論文、ベル不等式、PBR 定理の 3 題の内容をかいつまんで説明することにより、波動関数の解釈を廻って展開した量子力学の基礎に関する議論の推移と現況を述べた。加えて、近年注目を集めている新たな物理量概念の弱値と、その測定手段である弱測定にも触れた。いずれの説明も簡潔で直感的な理解を目指したものであり、そのため多少の厳密さを犠牲にし、また引用文献も最低限のものに止めたことを断っておきたい。なお紙幅の関係で、講義の際に言及したグリーソンの定理 [11]、コッヘン・スペッカーの状況依存性定理 [12]、自由意志定理 [13] については、本稿では割愛することとした。ベル不等式やコッヘン・スペッカー定理についてはマーミンによる極めて優れた解説 [14] があり、また自由意志定理を含めたこれらの話題の一般向け解説を試みたものに拙書 [15] がある。

参考文献

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777.
- [2] J. S. Bell, *Physics* **1** (1964) 195.
- [3] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 880.
- [4] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1804.
- [5] H. Sakai, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 150405.
- [6] M. Giustina, *et al.*, *Nature* **497** (2013) 227.
- [7] M. F. Pusey, J. Barrett and T. Rudolph, *Nature Physics* **8** (2012) 475.
- [8] Y. Aharonov, P. G. Bergmann and L. Lebowitz, *Phys. Rev.* **134** (1964) B1410.
- [9] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1351.
- [10] J. Lee and I. Tsutsui, 'Uncertainty of Weak Measurement and Merit of Amplification', arXiv: 1305.2721.
- [11] A. Gleason, *J. Math. Mech.* **6** (1957) 885.
- [12] S. Kochen and E. Specker, *J. Math. Mech.* **17** (1967) 59.
- [13] J. H. Conway and S. Kochen, *Found. Phys.* **36** (2006) 1441; *Notices of the AMS* **56** (2009) 226.
- [14] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 803.
- [15] 筒井 泉, 「量子力学の反常識と素粒子の自由意志」(岩波科学ライブラリー), 岩波書店, 2011 年.