

# 一次元光学格子中における 中性冷却 Bose 原子気体系の非平衡緩和過程

早稲田大学大学院基幹理工学研究科 山中由也研究室 桑原 幸朗

## 目次

1	諸言	1
2	Thermo Field Dynamics (TFD)	3
2.1	平衡 TFD	4
2.2	非平衡 TFD	7
3	ハミルトニアン	9
3.1	自由ハミルトニアンの対角化	10
3.2	時間依存の完全系	12
4	量子輸送方程式の導出	13
4.1	伝播関数	13
4.2	自己エネルギー	14
4.3	量子輸送方程式	16
5	数値計算	17
5.1	物理量	18
5.2	数値計算結果	18
6	まとめと今後の課題	21
付録 A	時間依存の完全系	22

## 1 諸言

近年、実験的にも理論的にも注目されている系に中性冷却原子気体系がある。この系は、光の Doppler 効果を利用したレーザー冷却や、エネルギーの高い原子を選択的に追い出し熱緩和によって系の温度を下げる蒸発冷却といった冷却法により、磁気トラップや光学トラップによって捕捉された中性原子気体を  $n\text{K} \sim \mu\text{K}$  オーダーの極低温へ冷却した系である。特に、Bose 原子系では転移温度以下で巨視的な数の粒子が最低エネルギー状態を占める Bose-Einstein 凝縮 (BEC)

という相転移現象が生じる [1-4]. この中性冷却原子気体系の BEC では, 例えば 2 つの凝縮体の干渉縞が観測された実験が報告されており [5], 本来微視的なスケールのため観測困難な量子現象を巨視的なスケールで観測することができるなど, 実験・理論の両分野において量子系における非常に興味深い系として扱われている.

また, 中性冷却原子気体系にはトラップの形状や相互作用の強さなどの実験パラメータを高い制御でコントロールできるという特徴がある. 例えばトラップの形状に関しては光学格子がある. これは対向レーザーによる定在波で作られる周期的ポテンシャルであり, これにより欠陥のない理想的な結晶格子を擬似的に作り出すことができる. また, 相互作用の強さを Feshbach 共鳴 [6, 7] という技法を使うことでコントロールでき, 斥力と引力の変換も可能である. このように中性冷却原子気体系は, 実験制御性の高さから理論計算と実験結果の比較を行いやすく, そのため理論検証の場として優れている.

さらに, 系の密度は  $10^{13} \sim 10^{15} / \text{cm}^3$  程度で通常の気体に比べると非常に希薄で, 相互作用が弱いため熱緩和がゆっくりで非平衡状態を観測しやすいという特徴があり, 非平衡系の量子論において魅力的な系である. 熱緩和に関する実験や理論研究として, 例えば捕捉トラップを微小に揺らすことで原子気体の集団励起を観測した実験 [8] やそれに対する理論研究 [9-12] がある. また, 蒸発冷却も熱緩和の遅い過程の一つであり, そのダイナミクスに関する理論研究も行われている [13].

量子多体系を記述する理論である場の量子論は, 素粒子論や宇宙論, 物性物理, 量子光学など様々な分野で用いられる基礎理論であり, 熱場の量子論は熱的状況に対する場の量子論である. 熱場の量子論の定式化の一つに, 実時間正準形式の定式化である Thermo Field Dynamics (TFD) [14] がある. 有限温度における物理量の期待値は, 通常は密度行列を用いたトレース演算による混合状態期待値で表されるが, TFD では自由度を倍加することで純粋状態の期待値として表現される. この時現れる真空を熱的真空と呼び, この熱的真空の上に空間を構築していくため, TFD は準粒子描像が明確に定義されるという特徴がある. そのため, 粒子描像が本質的である場合, 例えば系が非一様な空間分布を持つような場合などに対して有利である [15]. また, TFD は非平衡な場合への拡張も行われており (非平衡 TFD) [14], 明確な準粒子描像が定義されるという特徴は非平衡の状況にもあてはまる. 非平衡 TFD では時間依存の分布関数が未知関数として導入されるが, これは自己無撞着な繰り込み条件によって決定され, その際, 量子輸送方程式が導出される [14, 16].

TFD の研究は発展途上にあり, 研究の余地がある. 例えば時空に依存するモデルに対する TFD はまだ十分に研究されていない. そこで本論文では, 時空に依存するモデルとして次元光学格子中の中性冷却 Bose 気体系を採用し, その系に対して非平衡 TFD の立場で量子輸送方程式を導出する. そして, 導出された量子輸送方程式を数値的に解くことで系の非平衡状態から平衡状態への緩和過程を示す.

第 2 章では具体的な系に対する計算を行う事前準備として TFD についての概要を説明する.

最初に熱平衡状態に対する定式化である熱平衡 TFD を概説する．密度行列による混合状態期待値が自由度を倍加することで熱的真空による純粋状態の期待値で表現できることを示す．また熱的真空を消去する演算子として，もともとの生成消滅演算子と熱的 Bogoliubov 変換によって結ばれる演算子を導入する．Fermion 系に対しても同様な定式化ができるが，本論文では boson 系しか扱わないため説明は boson 系に対する定式化のみとする．次に，今回時空依存モデルを考えるので，分布関数が時間に依存する非平衡系に対する定式化である非平衡 TFD を概説する．この時，未知関数として導入された時間依存の分布関数により，もともとの演算子と熱的真空を消去する演算子は異なる時間発展をし，非摂動ハミルトニアンに熱的カウンター項が現れることを示す．そして，時間依存の分布関数と熱的カウンター項を自己無撞着に決定する on-shell 繰り込み条件を課す [17–19]．この on-shell 繰り込み条件から量子輸送方程式が導出されるが，実際に量子輸送方程式を導出するのは本論文で扱う系のハミルトニアンを記述した後に行う．

第 3 章ではハミルトニアンの記述を行う．まず，本論文で扱う一次元光学格子中の中性冷却 Bose 気体系の時空依存モデルを与え，そのモデルに対するハミルトニアンを考える．その際，光学格子中の中性冷却 Bose 気体系の解析に用いられる Bose-Hubbard ハミルトニアン [20] を記述する．本論文で扱うモデルは  $t < 0$  の場合と  $t \geq 0$  の場合で外場が異なるので，それぞれの場合に対して場の演算子を展開する． $t < 0$  では自由ハミルトニアンの対角化を利用し， $t \geq 0$  では時間依存の完全系で展開する [15, 18, 19]．

第 4 章では，第 3 章で記述するハミルトニアンに対する量子輸送方程式を非平衡 TFD の立場で実際に導出する．まず，非平衡 TFD の手順に従って自由度を倍加し，熱的真空を消去する演算子を導入する．次に，伝播関数を定義し，その伝播関数による Dyson 方程式で自己エネルギーを定義する．そして，第 2 章で考える on-shell 繰り込み条件を課すことで一次元光学格子中の中性冷却 Bose 気体系に対する量子輸送方程式を導出する．この時，自己エネルギーの計算は Feynman ダイアグラム法を用いて 2 次のループまで計算する．また，結果的に導出される量子輸送方程式は衝突項に過去の時間の分布関数も含まれる non-Markov 型の量子輸送方程式となっている．さらに，分布関数の時間依存性を現在の時間で代表させる Markov 近似を行うことで，Markov 型の量子輸送方程式も導出する．

第 5 章では，第 4 章で導出される量子輸送方程式を数値的に解くことにより系の非平衡緩和過程を示す．その際，非平衡緩和の様子を重心とその速度の時間変化を通して示す．また，non-Markov 型，Markov 型のそれぞれの輸送方程式を用いた計算結果を比較する．

第 6 章でまとめと今後の展望を述べる．

## 2 Thermo Field Dynamics (TFD)

この章では有限温度系の場の量子論の定式化の一つである TFD について概説する [14, 16]．なお，本研究では boson 系しか扱わないので boson 系に限って考える．また本論文では， $\hbar = 1$  の

単位系を用いる.

## 2.1 平衡 TFD

まず, 平衡 TFD について概説する. 簡単のため 1 自由度の場合で説明するが多自由度でも同様である.

有限温度系での物理量の期待値は混合状態の期待値で与えられる. TFD ではこの混合状態期待値を, Fock 空間を倍加することで純粋状態の期待値で表す. 以下このことを具体的に見ていく.

まず

$$\rho = (1-f) \sum_m f^m |m\rangle \langle m| \quad (2.1)$$

で定義される規格化された密度演算子  $\rho$  による混合状態での期待値

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A\rho] = (1-f) \sum_m f^m \langle m|A|m\rangle \quad (2.2)$$

について考える. ただし, 非摂動ハミルトニアン  $H_0$  を対角化するような生成消滅演算子を  $a^\dagger, a$  とすると, すなわち,  $H_0 = \omega a^\dagger a$  とすると  $|m\rangle, \langle m|$  は

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} a^{\dagger, m} |0\rangle, \quad \langle m| = \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle 0| a^m \quad (2.3)$$

である.  $f$  は平衡状態では Boltzmann 因子  $f = e^{-\beta\omega}$  (非平衡状態では  $0 \leq f < 1$  を満たす因子) である. ただし,  $\beta \equiv 1/k_B T$  であり,  $k_B$  は Boltzmann 定数である. また,  $A$  は  $a, a^\dagger$  で記述される演算子である ( $A = A[a, a^\dagger]$ ).

ここで, 次のように自由度を倍加することでチルダ演算子を導入する.

$$a \longrightarrow a \otimes 1, \quad 1 \otimes \tilde{a} \quad (2.4)$$

$$a^\dagger \longrightarrow a^\dagger \otimes 1, \quad 1 \otimes \tilde{a}^\dagger \quad (2.5)$$

$$|m\rangle \longrightarrow |m\rangle \otimes |n\rangle \quad (2.6)$$

ただし表記簡略のため, 今後  $1 \otimes \bullet$  や  $\bullet \otimes 1$  は省略する. このとき, 非チルダ演算子  $a, a^\dagger$  とチルダ演算子  $\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$  に対する交換関係は

$$[a, a^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \quad (2.7)$$

$$[a, \tilde{a}] = [a, \tilde{a}^\dagger] = [a^\dagger, \tilde{a}] = [a^\dagger, \tilde{a}^\dagger] = 0 \quad (2.8)$$

で定義される. ここで, 次の熱的真空を導入する.

$$|0\rangle = (1-f)^\alpha \sum_m f^{m\alpha} |m\rangle \otimes |m\rangle \quad (2.9)$$

$$\langle 0| = (1-f)^{1-\alpha} \sum_m f^{m(1-\alpha)} \langle m| \otimes \langle m| \quad (2.10)$$

ただし,  $\alpha$  は  $0 \leq \alpha \leq 1$  を満たす自由度である. このとき

$$\langle 0|0 \rangle = (1-f) \sum_{mn} f^{m(1-\alpha)} f^{n\alpha} (\langle m| \otimes \langle m|)(|n \rangle \otimes |n \rangle) \quad (2.11)$$

$$= (1-f) \sum_m f^m (= \text{Tr}[\rho]) \quad (2.12)$$

$$= 1 \quad (2.13)$$

であることがわかる. 式 (2.9), (2.10) の熱的真空を用いて  $A[a, a^\dagger]$  の期待値をとると

$$\langle 0|A|0 \rangle = (1-f) \sum_m f^m \langle m|A|m \rangle \quad (2.14)$$

$$= \langle A \rangle \quad (2.15)$$

となり, 混合状態期待値を純粋状態の期待値で表せることがわかる. ここで, 最初の等式変形で  $A$  には  $\tilde{a}$  が含まれないことを利用した. なお TFD でのハミルトニアンは, 非チルダ演算子とチルダ演算子の両方の時間発展をさせるため,  $H$  ではなく  $\hat{H} \equiv H - \tilde{H}$  で定義される  $\hat{H}$  である.

### 2.1.1 チルダ共役則

ここでは前節で導入したチルダ演算子に関連して, チルダ共役 ( $A \rightleftharpoons \tilde{A}$ ) を次のチルダ共役則に従って定義する.

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \quad (2.16)$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2 \quad (2.17)$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger \quad (2.18)$$

$$(\tilde{A})^\sim = A \quad (2.19)$$

$$|0\rangle^\sim = |0\rangle \quad (2.20)$$

$$\langle 0|^\sim = \langle 0| \quad (2.21)$$

ただし,  $A_i$  は任意の演算子であり,  $c_i$  は任意の c-数である.

### 2.1.2 熱的 Bogoliubov 変換

式 (2.9), (2.10) で定義される熱的真空はゼロ温度でなければ  $a$  演算子に対する真空ではない. すなわち

$$a|0\rangle \neq 0, \quad \tilde{a}|0\rangle \neq 0, \quad \langle 0|a^\dagger \neq 0, \quad \langle 0|\tilde{a}^\dagger \neq 0 \quad (2.22)$$

である. そこで

$$\xi|0\rangle = 0, \quad \tilde{\xi}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\xi^\dagger = 0, \quad \langle 0|\tilde{\xi}^\dagger = 0 \quad (2.23)$$

となるような、熱的真空 (2.9), (2.10) に対する生成消滅演算子である  $\xi$  演算子を導入する. ただし,  $\xi$  演算子は交換関係

$$[\xi, \xi^\dagger] = [\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^\dagger] = 1 \quad (2.24)$$

$$[\xi, \tilde{\xi}] = [\xi, \tilde{\xi}^\dagger] = [\xi^\dagger, \tilde{\xi}] = [\xi^\dagger, \tilde{\xi}^\dagger] = 0 \quad (2.25)$$

を満たすものとする. このとき, 熱的二重項表記

$$a^\mu = \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^\dagger \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{a}^\nu = (a^\dagger \quad -\tilde{a})^\nu \quad (2.26)$$

$$\xi^\mu = \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi}^\dagger \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{\xi}^\nu = (\xi^\dagger \quad -\tilde{\xi})^\nu \quad (2.27)$$

を導入すると, 熱的 Bogoliubov 行列

$$B^{\mu\nu} = \left[ e^{s\sigma_3} \sqrt{1+n} \begin{pmatrix} 1 & -f^\alpha \\ -f^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} \right]^{\mu\nu} \quad (2.28)$$

$$B^{-1,\mu\nu} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & f^\alpha \\ f^{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} \sqrt{1+n} e^{-s\sigma_3} \right]^{\mu\nu} \quad (2.29)$$

を用いて  $a$  演算子と  $\xi$  演算子は熱的 Bogoliubov 変換

$$a^\mu = B^{-1,\mu\nu} \xi^\nu, \quad \bar{a}^\nu = \bar{\xi}^\mu B^{\mu\nu} \quad (2.30)$$

で結ばれる. ただし,  $n$  は  $n \equiv \langle 0|a^\dagger a|0\rangle$  で定義される分布関数であり, 平衡状態では Bose-Einstein 分布

$$n = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \quad (2.31)$$

である. 前述の  $f$  とは

$$n = \frac{f}{1-f} \quad (2.32)$$

の関係がある (非平衡状態でも式 (2.32) は  $n$  と  $f$  を関係づける式である). また,  $s$  は Bogoliubov 変換におけるスケール変換に対応するパラメータであり,  $\sigma_3$  は Pauli の第 3 行列である. ここで, 上付き添え字が繰り返されるととき暗黙的に和をとっている (今後特に断らない限り同様である).

なお, 非摂動ハミルトニアン  $\hat{H}_0$  は

$$\hat{H}_0 = H_0 - \tilde{H}_0 \quad (2.33)$$

$$= \omega \bar{a}^\mu a^\mu \quad (2.34)$$

$$= \omega \bar{\xi}^\mu \xi^\mu \quad (2.35)$$

なので,  $a$  演算子に対しても  $\xi$  演算子に対しても対角的になっている. したがって,  $a$  演算子と  $\xi$  演算子の相互作用描像における時間依存性は

$$a^\mu(t) = a^\mu e^{-i\omega t} \quad (2.36)$$

$$\xi^\mu(t) = \xi^\mu e^{-i\omega t} \quad (2.37)$$

となる.

## 2.2 非平衡 TFD

ここでは, 前節の  $n_\ell$  を  $n_\ell(t)$  へ変更することで非平衡 TFD への拡張を概説する. ただし, 現段階では  $n_\ell(t)$  は未知関数であり, 自己無撞着な繰り込み条件により決定される. そしてその際, 量子輸送方程式が導出される. なお, 第 3 章で具体的なモデルを提案後, そのモデルに非平衡 TFD を適用することを踏まえて, この節では多自由度の場合で説明する.

### 2.2.1 $a$ 演算子と $\xi$ 演算子の時間発展

まず,  $a_\ell$  と  $\xi_\ell$  演算子の相互作用描像での Heisenberg 方程式について考える. 非摂動ハミルトニアンを  $\hat{H}_Q(t)$  とすると  $a_\ell$  演算子の Heisenberg 方程式は

$$i\partial_t a_\ell^\mu(t) = [a_\ell^\mu(t), \hat{H}_Q(t)] \quad (2.38)$$

で与えられる. 一方,  $n_\ell(t)$  の時間依存性により Bogoliubov 変換は

$$a_\ell^\mu(t) = B_\ell^{-1,\mu\nu}(t)\xi_\ell^\nu(t), \quad \bar{a}_\ell^\nu(t) = \bar{\xi}_\ell^\mu(t)B_\ell^{\mu\nu}(t) \quad (2.39)$$

のように熱的 Bogoliubov 行列に時間依存性が入ってくるため,  $\xi_\ell$  演算子の Heisenberg 方程式は

$$i\partial_t \xi_\ell^\mu(t) = [\xi_\ell^\mu(t), \hat{H}_Q(t) + \hat{Q}(t)] \quad (2.40)$$

となり,  $a_\ell$ ,  $\xi_\ell$  演算子でそれぞれ時間発展の仕方が異なることがわかる. ただし

$$\hat{Q}(t) = -i \sum_\ell \bar{\xi}_\ell^\mu(t) \left[ B_\ell(t) \dot{B}_\ell^{-1}(t) \right]^{\mu\nu} \xi_\ell^\nu(t) \quad (2.41)$$

である. ここで, TFD は時間依存しない真空の上に理論を構築するので, 「 $\hat{H}_Q(t) + \hat{Q}(t)$  は  $\xi_\ell$  演算子に対して対角的」という要請をする. すなわち

$$\hat{H}_0(t) = \sum_\ell \omega_\ell(t) \bar{a}_\ell^\mu(t) a_\ell^\mu(t) = \sum_\ell \omega_\ell(t) \bar{\xi}_\ell^\mu(t) \xi_\ell^\mu(t) \quad (2.42)$$

と表される自由ハミルトニアン  $\hat{H}_0(t)$  を用いると, 式 (2.38), (2.40) より

$$\hat{H}_Q(t) = \hat{H}_0(t) - \hat{Q}(t) \quad (2.43)$$

となる ( $\omega_\ell(t)$  は時間依存のエネルギー繰り込み条件のため一般に時間依存する. 本論文では時間依存のエネルギー繰り込み条件は扱わないが, 今後の展望のため  $\omega_\ell(t)$  を用いる). この  $\hat{Q}(t)$  を熱的カウンター項と呼ぶ. このとき, 摂動ハミルトニアンは

$$\hat{H}_I(t) = \hat{H}_{\text{int}}(t) + \hat{Q}(t) \quad (2.44)$$

である.

ところで, 熱的 Bogoliubov 行列 (2.28), (2.29) には  $\alpha, s$  という自由度が残っていた. ここでは, 後に Feynman ダイアグラムによる摂動計算をすること, かつ最終的に得られる輸送方程式がエントロピー則と矛盾しないようにすることを踏まえて,  $\alpha_\ell = 1, s_\ell = \log\sqrt{1+n_\ell(t)}$  を要請する. このとき熱的 Bogoliubov 行列は

$$B_\ell^{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 1+n_\ell(t) & -n_\ell(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad B_\ell^{-1,\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell(t) \\ 1 & 1+n_\ell(t) \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (2.45)$$

となり, 熱的カウンター項は

$$\hat{Q}(t) = -i \sum_\ell \dot{n}_\ell(t) \bar{\xi}_\ell^\mu(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \xi_\ell^\nu(t) \quad (2.46)$$

となる.

## 2.2.2 On-shell 繰り込み条件

現段階では  $n_\ell(t)$  は未知関数である. そのため,  $\hat{Q}(t)$  も  $\dot{n}_\ell(t)$  が含まれるので未知である. しかし,  $\hat{H}_Q(t)$  には  $\hat{Q}(t)$  が含まれているので,  $\hat{Q}(t)$  が決まらなければ  $n_\ell(t)$  も決まらない. したがって,  $n_\ell(t)$  と  $\hat{Q}(t)$  は自己無撞着に決定しなければならない. そこで, 次のように自己無撞着な繰り込み条件を課す [14, 16–19].

まず,  $\xi_\ell$  演算子に対する Dyson 方程式

$$g_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) S_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) g_{m_2\ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2) \quad (2.47)$$

で自己エネルギー  $S_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  を定義する. ここで,  $d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2), g_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  はそれぞれ自由伝播関数, 全伝播関数であり,

$$d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T[\xi_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (2.48)$$

$$g_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T[\xi_{H\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{H\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (2.49)$$

と定義される. ただし, 下付き添え字 H は Heisenberg 表示の演算子を意味する. この自己エネルギーに対して

$$S_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}[k_0, t] = \int d\tau \left[ \theta(\tau) S_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t, t-\tau) e^{i \int_{t-\tau}^t ds k_0(s)} + \theta(-\tau) S_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t+\tau, t) e^{i \int_t^{t+\tau} ds k_0(s)} \right] \quad (2.50)$$

で定義される  $k_0$  表現を採用する. また, 自由伝播関数  $d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  にも自己エネルギーと同様に  $k_0$  表現を定義する:

$$d_{\ell_1\ell_2}^{\mu\nu}[k_0, t] = \delta_{\ell_1\ell_2} \int d\tau \begin{pmatrix} -i\theta(\tau) e^{i \int_{t-\tau}^t ds [k_0(s) - \omega_{\ell_1}(s)]} & 0 \\ 0 & i\theta(-\tau) e^{i \int_t^{t+\tau} ds [k_0(s) - \omega_{\ell_1}(s)]} \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (2.51)$$



この  $d_{\ell\ell}^{\mu\nu}[k_0, t]$  の極  $k_0(t) = \omega_\ell(t)$  で on-shell を定義し,  $S_{\ell\ell}^{12}[k_0, t]$  に on-shell 繰り込み条件

$$S_{\ell\ell}^{12}[\omega_\ell, t] = 0 \quad (2.52)$$

を課すことで, 最終的に  $n_\ell(t)$  の時間依存性を決定する量子輸送方程式が導出される. 輸送方程式導出までの具体的な計算は, 今回扱うモデルのハミルトニアンについての説明をしてから行う.

### 3 ハミルトニアン

この章では対象とする系とそのハミルトニアンを記述する.

対象とする系は次のような系である. まず, 調和振動子トラップポテンシャルに Bose 気体を捕捉し, 光学格子を掛け,  $t < 0$  で平衡状態を用意しておく. ただし, 簡単のため次元系とする. 次に,  $t = 0$  でトラップを  $x_d$  だけずらす. このとき系は非平衡状態となる. 一連の操作の概略図を図 1 に示す.

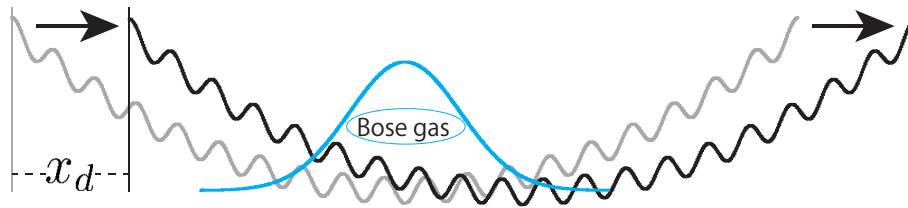


図 1 モデル概略図

今回, この系のハミルトニアンを強結合近似の施された次元 Bose-Hubbard モデル [20] を用いて記述する. ハミルトニアンは次のようになる.

$$H(t) = \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c + \theta(-t)d)^2 V - \mu\} \psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) + \frac{U}{2} \psi_i^\dagger(t)\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t)\psi_i(t) \right] \quad (3.1)$$

$$= H_0(t) + H_{\text{int}}(t) \quad (3.2)$$

$$H_0(t) = \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c + \theta(-t)d)^2 V - \mu\} \psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) \right] \quad (3.3)$$

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{I_s} \psi_i^\dagger(t)\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t)\psi_i(t) \quad (3.4)$$

$H_0(t), H_{\text{int}}(t)$  はそれぞれ自由ハミルトニアン, 相互作用ハミルトニアンである. ただし,  $i$  はサ

イト番号を表し,  $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$  は同時刻交換関係

$$[\psi_i(t), \psi_j^\dagger(t)] = \delta_{ij} \quad (3.5)$$

$$[\psi_i(t), \psi_j(t)] = 0 \quad (3.6)$$

$$[\psi_i^\dagger(t), \psi_j^\dagger(t)] = 0 \quad (3.7)$$

を満たす場の演算子である.  $I_s, I_c$  は全サイト数, 中心サイトをそれぞれ表し,  $I_c = (I_s - 1)/2$  である.  $J, \mu, U, V$  はそれぞれホッピング項, 化学ポテンシャル, オンサイトの接触相互作用定数, 調和トラップの強さである. また  $d$  はトラップのずらし幅を表す量であり, 光学格子を作るレーザーの波長を  $\lambda_{\text{opt}}$  として  $d = 2x_d/\lambda_{\text{opt}}$  である. ハミルトニアン (3.1) において, 最初の  $-J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t))$  はサイト間の移動のしやすさを表す項であり, ここでは隣接サイトへの移動のみを考慮している. また,  $(i - I_c + \theta(-t)d)^2 V \psi_i^\dagger(t)\psi_i(t)$  は調和トラップの効果を表し,  $\theta(-t)d$  は時刻  $t = 0$  でトラップが  $d$  だけずれることを表す. 最後の項  $\frac{U}{2}\psi_i^\dagger(t)\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t)\psi_i(t)$  は粒子間相互作用を表す項で, ここではサイトをまたがった相互作用の効果は考えないものとする.

### 3.1 自由ハミルトニアンの対角化

まず, 式 (3.3) より  $t < 0$  における自由ハミルトニアンは

$$H_0(t) = \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c + d)^2 V - \mu\}\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) \right] \quad (3.8)$$

である. ここでは  $H_0(t)$  の対角化を考える.  $H_0(t)$  を書き直すと

$$H_0(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t) A^0 \boldsymbol{\psi}(t) \quad (3.9)$$

となる. ここで,

$$A^0 \equiv \begin{pmatrix} \nu_1^0 - \mu & -J & 0 & \cdots & 0 \\ -J & \nu_2^0 - \mu & -J & \ddots & \vdots \\ 0 & -J & \nu_3^0 - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -J \\ 0 & \cdots & 0 & -J & \nu_{I_s}^0 - \mu \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\nu_i^0 \equiv (i - I_c + d)^2 V \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_{I_s}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}^\dagger(t) = \left( \psi_1^\dagger(t) \quad \psi_2^\dagger(t) \quad \cdots \quad \psi_{I_s}^\dagger(t) \right) \quad (3.12)$$

である。したがって、 $H_0(t)$  の対角化を考えることは次の固有値問題を考えることに帰着する。

$$A^0 \mathbf{u}_\ell = \omega_\ell^0 \mathbf{u}_\ell \quad (3.13)$$

ここで、

$$\mathbf{u}_\ell = \begin{pmatrix} u_{1\ell} \\ u_{2\ell} \\ \vdots \\ u_{I_s\ell} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_\ell^t = (u_{1\ell} \quad u_{2\ell} \quad \cdots \quad u_{I_s\ell}) \quad (3.14)$$

は 1 に規格化されているものとする。すなわち、

$$\sum_i u_{i\ell} u_{i\ell'} = \delta_{\ell\ell'} \quad (3.15)$$

とする。また完全性条件は

$$\sum_\ell u_{i\ell} u_{j\ell} = \delta_{ij} \quad (3.16)$$

で与えられる。このとき、

$$W = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^t \\ \mathbf{u}_2^t \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad W^{-1} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots) \quad (3.17)$$

で与えられる  $W$  を用いると、式 (3.9) は

$$H_0(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t) W^{-1} W A^0 W^{-1} W \boldsymbol{\psi}(t) \quad (3.18)$$

$$= \mathbf{a}^\dagger(t) W A^0 W^{-1} \mathbf{a}(t) \quad (3.19)$$

$$= \sum_\ell \omega_\ell^0 a_\ell^\dagger a_\ell \quad (3.20)$$

のように対角化される。ここで、

$$\mathbf{a}(t) = W \boldsymbol{\psi}(t), \quad \mathbf{a}^\dagger(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t) W^{-1} \quad (3.21)$$

である。また、式変形では式 (3.15), (3.16) から得られる

$$(W W^{-1})_{\ell\ell'} = \delta_{\ell\ell'} \quad (3.22)$$

$$(W^{-1} W)_{ij} = \delta_{ij} \quad (3.23)$$

を用いた。なお、式 (3.20) で  $a_\ell$  の時間依存性がないのは

$$a_\ell(t) = a_\ell e^{-i\omega_\ell^0 t} \quad (3.24)$$

のように,  $a_\ell(t)$  の時間依存性を変数分離できるためである. また,  $a_\ell, a_\ell^\dagger$  は  $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$  の同時刻交換関係 (3.5)~(3.7) および  $\{u_{i\ell}\}$  の正規直交条件 (3.15) より, 交換関係

$$[a_\ell, a_{\ell'}^\dagger] = \delta_{\ell\ell'} \quad (3.25)$$

$$[a_\ell, a_{\ell'}] = 0 \quad (3.26)$$

$$[a_\ell^\dagger, a_{\ell'}^\dagger] = 0 \quad (3.27)$$

を満たす.

### 3.2 時間依存の完全系

次に  $t \geq 0$  のときのハミルトニアンは

$$H_0(t) = \sum_{i=1}^{I_s} \left[ -J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c)^2 V - \mu\}\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) \right] \quad (3.28)$$

$$= \psi^\dagger(t) A \psi(t) \quad (3.29)$$

である. ただし,

$$A \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 - \mu & -J & 0 & \cdots & 0 \\ -J & \nu_2 - \mu & -J & \ddots & \vdots \\ 0 & -J & \nu_3 - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -J \\ 0 & \cdots & 0 & -J & \nu_{I_s} - \mu \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\nu_i \equiv (i - I_c)^2 V \quad (3.31)$$

である. 今回扱う系は外場が ( $t = 0$  で) 時間依存するので, 時間依存する正規直交完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  を用いて場の演算子  $\psi_i(t)$  を

$$\psi_i(t) = \sum_{\ell} v_{i\ell}(t) a_\ell(t) \quad (3.32)$$

のように展開する [18, 19]. ここで,  $a_\ell(t)$  の外場による時間依存性をすべて完全系に押し付けるように展開すると,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  は Schrödinger 方程式に従って時間発展する. すなわち

$$i\partial_t v_{i\ell}(t) = \sum_j A_{ij} v_{j\ell}(t) \quad (3.33)$$

である (付録 A 参照). また,  $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$  の同時刻交換関係 (3.5)~(3.7) より,  $a_\ell(t), a_\ell^\dagger(t)$  に対して同時刻交換関係

$$[a_\ell(t), a_{\ell'}^\dagger(t)] = \delta_{\ell\ell'} \quad (3.34)$$

$$[a_\ell(t), a_{\ell'}(t)] = 0 \quad (3.35)$$

$$[a_\ell^\dagger(t), a_{\ell'}^\dagger(t)] = 0 \quad (3.36)$$

を得る.

ここで, 分布関数を展開係数  $\{a_\ell(t)\}$  を用いて  $n_\ell(t) \equiv \langle 0|a_\ell^\dagger(t)a_\ell(t)|0\rangle$  と定義する. このとき, 完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  の初期条件として前節の  $\{u_{i\ell}\}$  を用いて  $v_{i\ell}(0) = u_{i\ell}$  と与えると,  $n_\ell(t)$  の初期条件は

$$n_\ell(0) = \langle 0|a_\ell^\dagger a_\ell|0\rangle = \frac{1}{e^{\beta\omega_\ell^0} - 1} \quad (3.37)$$

で与えられる.

## 4 量子輸送方程式の導出

この章では非平衡 TFD を用いて, 3章で考えた系の量子輸送方程式を実際に導出する.

### 4.1 伝播関数

まずは非平衡 TFD に従って, 自由度を倍加する.

$$\psi_i^\mu(t) = \begin{pmatrix} \psi_i(t) \\ \tilde{\psi}_i^\dagger(t) \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{\psi}_i^\nu(t) = (\psi_i^\dagger(t) \quad -\tilde{\psi}_i(t))^\nu \quad (4.1)$$

$$a_\ell^\mu(t) = \begin{pmatrix} a_\ell(t) \\ \tilde{a}_\ell^\dagger(t) \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{a}_\ell^\nu(t) = (a_\ell^\dagger(t) \quad -\tilde{a}_\ell(t))^\nu \quad (4.2)$$

ここで

$$\psi_i^\mu(t) = \sum_\ell v_{i\ell}(t)a_\ell^\mu(t), \quad \bar{\psi}_i^\nu(t) = \sum_\ell v_{i\ell}^*(t)\bar{a}_\ell^\nu(t) \quad (4.3)$$

である. また,  $a_\ell$  演算子と熱的真空を消去する  $\xi_\ell$  演算子は熱的 Bogoliubov 変換

$$a_\ell^\mu(t) = B_\ell^{-1,\mu\nu}(t)\xi_\ell^\nu, \quad \bar{a}_\ell^\nu(t) = \bar{\xi}_\ell^\mu B_\ell^{\mu\nu}(t) \quad (4.4)$$

で結ばれる. ただし

$$\xi_\ell^\mu = \begin{pmatrix} \xi_\ell \\ \tilde{\xi}_\ell^\dagger \end{pmatrix}^\mu, \quad \bar{\xi}_\ell^\nu = (\xi_\ell^\dagger \quad -\tilde{\xi}_\ell)^\nu \quad (4.5)$$

$$\xi_\ell|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\xi_\ell^\dagger = 0, \quad \tilde{\xi}_\ell|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\tilde{\xi}_\ell^\dagger = 0 \quad (4.6)$$

$$B_\ell^{\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 1 + n_\ell(t) & -n_\ell(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}, \quad B_\ell^{-1,\mu\nu}(t) = \begin{pmatrix} 1 & n_\ell(t) \\ 1 & 1 + n_\ell(t) \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (4.7)$$

である. ここで,  $\xi_\ell$  演算子の時間依存性は, 外場の時間依存由来のものは完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  に,  $\{n_\ell(t)\}$  由来のものは  $\{a_\ell(t)\}$  に押し込めた. また, このとき熱的カウンタ項  $\hat{Q}(t)$  は式 (2.46) より

$$\hat{Q}(t) = -i \sum_\ell \dot{n}_\ell(t) \bar{\xi}_\ell^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mu\nu} \xi_\ell^\nu \quad (4.8)$$

である.

次に,  $\psi_i, a_\ell, \xi_\ell$  演算子それぞれに対する全伝播関数および非摂動伝播関数を定義する. まとめて書くと

$$\Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [\psi_{i_1}^\mu(t_1) \bar{\psi}_{i_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.9)$$

$$G_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [\psi_{H i_1}^\mu(t_1) \bar{\psi}_{H i_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.10)$$

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [a_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.11)$$

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [a_{H \ell_1}^\mu(t_1) \bar{a}_{H \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.12)$$

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [\xi_{\ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{\ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.13)$$

$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \equiv -i \langle 0 | T [\xi_{H \ell_1}^\mu(t_1) \bar{\xi}_{H \ell_2}^\nu(t_2)] | 0 \rangle \quad (4.14)$$

である. また, 相互作用描像の  $\xi_\ell$  演算子は時間依存性がないが, 式 (4.13) 中の  $\xi_\ell(t)$  は T 積の順序を指定するために表記したものである. ここで, 各伝播関数の間の関係を表しておくとして式 (4.3), (4.4) より

$$\Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \sum_{\ell_1 \ell_2} v_{i_1 \ell_1}(t_1) \Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) v_{i_2 \ell_2}^*(t_2) \quad (4.15)$$

$$G_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \sum_{\ell_1 \ell_2} v_{i_1 \ell_1}(t_1) G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) v_{i_2 \ell_2}^*(t_2) \quad (4.16)$$

$$\Delta_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2) \quad (4.17)$$

$$G_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2) \quad (4.18)$$

$$\Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \sum_{\ell_1 \ell_2} v_{i_1 \ell_1}(t_1) B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2) v_{i_2 \ell_2}^*(t_2) \quad (4.19)$$

$$G_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \sum_{\ell_1 \ell_2} v_{i_1 \ell_1}(t_1) B_{\ell_1}^{-1, \mu\mu'}(t_1) g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{\nu'\nu}(t_2) v_{i_2 \ell_2}^*(t_2) \quad (4.20)$$

となる.

## 4.2 自己エネルギー

次に, 自己エネルギーを Dyson 方程式によって定義する. すなわち

$$G_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{j_1 j_2} \int ds_1 ds_2 \Delta_{i_1 j_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) \Sigma_{j_1 j_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) G_{j_2 i_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2) \quad (4.21)$$

$$g_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) + \sum_{m_1 m_2} \int ds_1 ds_2 d_{\ell_1 m_1}^{\mu\mu'}(t_1, s_1) S_{m_1 m_2}^{\mu'\nu'}(s_1, s_2) g_{m_2 \ell_2}^{\nu'\nu}(s_2, t_2) \quad (4.22)$$

で自己エネルギー  $\Sigma_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2), S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  を定義する. このとき,  $\Sigma_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2), S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  の関係は

$$S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \sum_{i_1 i_2} v_{i_1 \ell_1}^*(t_1) B_{\ell_1}^{\mu\mu'}(t_1) \Sigma_{i_1 i_2}^{\mu'\nu'}(t_1, t_2) B_{\ell_2}^{-1, \nu'\nu}(t_2) v_{i_2 \ell_2}(t_2) \quad (4.23)$$

である.

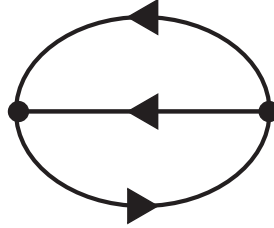


図2 2ループ自己エネルギーのダイアグラム

あとは自己エネルギー  $S_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  の  $k_0$  表現をとり, on-shell 繰り込み条件 (2.52) を課せばよい. そこで, 自己エネルギーを  $S = S_{\text{loop}} + S_Q$  のようにループからの寄与と熱的カウンター項からの寄与に分割し, それぞれの自己エネルギーを計算する. まず, 自己エネルギーへのループの寄与を考える. 今回は図2のようなダイアグラムを計算する. このとき, 対応する自己エネルギーは

$$\Sigma_{\text{loop}, i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -2U^2 \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu \Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) \Delta_{i_2 i_1}^{\nu\mu}(t_2, t_1) \quad (4.24)$$

となる. ただし

$$\varepsilon^\mu = \begin{cases} 1 & (\mu = 1) \\ -1 & (\mu = 2) \end{cases} \quad (4.25)$$

である. この  $\Sigma_{\text{loop}, i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  を計算していくために, まず  $d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  を計算し, 式 (4.19) を利用し  $\Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  を求める.  $d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は式 (4.13) より

$$d_{\ell_1 \ell_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = \delta_{\ell_1 \ell_2} \begin{pmatrix} -i\theta(t_1 - t_2) & 0 \\ 0 & i\theta(t_2 - t_1) \end{pmatrix}^{\mu\nu} \quad (4.26)$$

$$= -i\delta_{\ell_1 \ell_2} \left[ \theta(t_1 - t_2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}^\nu - \theta(t_2 - t_1) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}^\nu \right] \quad (4.27)$$

である. ただし,  $\{\}^\mu$  という表記は

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}^\mu = \begin{cases} a & (\mu = 1) \\ b & (\mu = 2) \end{cases} \quad (4.28)$$

で定義されるテンソル表記である. 式 (4.19) より

$$\Delta_{i_1 i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = -i\varepsilon^\nu \sum_{\ell} v_{i_1 \ell}(t_1) v_{i_2 \ell}^*(t_2) \left[ \theta(t_1 - t_2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} 1 + n_{\ell}(t_2) \\ n_{\ell}(t_2) \end{Bmatrix}^\nu + \theta(t_2 - t_1) \begin{Bmatrix} n_{\ell}(t_1) \\ 1 + n_{\ell}(t_1) \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^\nu \right] \quad (4.29)$$

となる。したがって、 $\Sigma_{\text{loop},i_1i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  は

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{loop},i_1i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2) = & -2iU^2 \varepsilon^\nu \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3} v_{i_1\ell_1}(t_1)v_{i_1\ell_2}(t_1)v_{i_1\ell_3}^*(t_1)v_{i_2\ell_1}^*(t_2)v_{i_2\ell_2}^*(t_2)v_{i_2\ell_3}(t_2) \\ & \times \left[ \theta(t_1 - t_2) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} (1+n_{\ell_1})(1+n_{\ell_2})n_{\ell_3} \\ n_{\ell_1}n_{\ell_2}(1+n_{\ell_3}) \end{Bmatrix}^\nu \right. \\ & \left. + \theta(t_2 - t_1) \begin{Bmatrix} n_{\ell_1}n_{\ell_2}(1+n_{\ell_3}) \\ (1+n_{\ell_1})(1+n_{\ell_2})n_{\ell_3} \end{Bmatrix}^\mu \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^\nu \right]_{\min(t_1, t_2)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

となる。ただし、 $[\ ]_{\min(t_1, t_2)}$  は  $[\ ]$  の中の  $n_\ell$  の引数が  $t_1, t_2$  のうち小さい方であることを意味する。なお、式 (4.24), (4.29), (4.30) において  $\mu, \nu$  についての和はとらない。

### 4.3 量子輸送方程式

ここで、繰り込み条件 (2.52) を課すために、前節で求めた  $\Sigma_{\text{loop},i_1i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)$  から繰り込み条件に必要な  $S_{\text{loop},\ell\ell}^{12}(t_1, t_2)$  を式 (4.23) を用いて計算する。すると

$$S_{\text{loop},\ell\ell}^{12}(t_1, t_2) = 2iU^2 \sum_{i_1, i_2} v_{i_1\ell}^*(t_1)B_\ell^{1\mu}(t_1)\Sigma_{\text{loop},i_1i_2}^{\mu\nu}(t_1, t_2)B_\ell^{-1, \nu 2}(t_2)v_{i_2\ell}(t_2) \quad (4.31)$$

$$= 2iU^2 \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3} C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t_1)C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}^*(t_2)R_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(\min(t_1, t_2)) \quad (4.32)$$

となる。ここで

$$C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t) \equiv \sum_i v_{i\ell_1}(t)v_{i\ell_2}(t)v_{i\ell_3}^*(t)v_{i\ell}^*(t) \quad (4.33)$$

$$R_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t) \equiv n_{\ell_1}(t)n_{\ell_2}(t)(1+n_{\ell_3}(t))(1+n_\ell(t)) - (1+n_{\ell_1}(t))(1+n_{\ell_2}(t))n_{\ell_3}(t)n_\ell(t) \quad (4.34)$$

である。一方、式 (4.8) の熱的カウンタ項  $\hat{Q}(t)$  の自己エネルギーへの寄与は、繰り込み条件 (2.52) に必要な成分だけ書き出すと

$$S_{Q,\ell\ell}^{12}(t_1, t_2) = -in_\ell(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (4.35)$$

である。さらに、式 (4.32), (4.35) の  $k_0$  表現は式 (2.50) よりそれぞれ

$$\begin{aligned} S_{\text{loop},\ell\ell}^{12}[k_0, t] = & 2iU^2 \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3} \left[ \int_0^\infty d\tau C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t)C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}^*(t-\tau)R_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t-\tau)e^{i\int_{t-\tau}^t ds k_0(s)} \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^0 d\tau C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t+\tau)C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}^*(t)R_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t+\tau)e^{-i\int_{t+\tau}^t ds k_0(s)} \right] \\ = & 4iU^2 \text{Re} \sum_{\ell_1\ell_2\ell_3} \int_{-\infty}^t d\tau C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(t)C_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}^*(\tau)R_{\ell_1\ell_2; \ell_3\ell}(\tau)e^{i\int_\tau^t ds k_0(s)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$S_{Q,\ell\ell}^{12}[k_0, t] = -in_\ell(t) \quad (4.37)$$



となる。したがって、on-shell 繰り込み条件 (2.52) を課すと量子輸送方程式

$$\dot{n}_\ell(t) = 4U^2 \text{Re} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} \int_0^t ds C_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(t) C_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}^*(s) R_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(s) \quad (4.38)$$

が導出される。ただし、 $a_\ell, \xi_\ell$  の時間依存性は完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  に押し込めているので、今の場合 on-shell は  $k_0(t) = 0$  である。また、 $t < 0$  では調和トラップをずらす前なので  $n_\ell$  は平衡分布であり、そのため、式 (4.38) の積分範囲は 0 以上である。

この量子輸送方程式は衝突項に過去の時間の分布関数も含まれる non-Markov 型の量子輸送方程式である。また  $n_{\ell_1} n_{\ell_2} (1 + n_{\ell_3}) (1 + n_\ell) - (1 + n_{\ell_1}) (1 + n_{\ell_2}) n_{\ell_3} n_\ell$  という項は粒子の 2 体散乱の過程を表す項である。式 (4.38) にはエネルギー保存を表す項がないが、これは non-Markov 型の量子輸送方程式を通して見たときの衝突から衝突までのタイムスケールが、エネルギーが不確定となるくらい十分短いためである。なお、 $1 + n$  は Bose 統計性の現れで、古典極限 ( $n \ll 1$ ) では  $1 + n \rightarrow 1$  となる。

なお、式 (4.38) に分布関数の時間依存性を現在の時刻で代表させる ( $n_\ell(s) \rightarrow n_\ell(t)$ ) ような Markov 近似を施すと

$$\dot{n}_\ell(t) = 4U^2 \text{Re} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3} C_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(t) \mathcal{C}_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}^*(t) R_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(t) \quad (4.39)$$

となる。ここで

$$\mathcal{C}_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(t) \equiv \int_0^t ds C_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(s) \quad (4.40)$$

である。Markov 型の量子輸送方程式を通して見たときの衝突から衝突までのタイムスケールは、エネルギーが確定するには十分の長さであり、 $\text{Re} C_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}(t) \mathcal{C}_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell}^*(t)$  はエネルギー保存に対応する項である。

## 5 数値計算

この章では、前章で導出した量子輸送方程式を数値計算した結果を示す。具体的には完全系の時間発展方程式 (3.33) と non-Markov 型量子輸送方程式 (4.38) または Markov 型量子輸送方程式 (4.39) とを連立することで  $n_\ell(t)$  と  $v_{i\ell}(t)$  を時間発展させ、得られた  $n_\ell(t), v_{i\ell}(t)$  から物理量を計算する。なお、 $n_\ell(t), v_{i\ell}(t)$  の初期条件をそれぞれ第 3 章より

$$n_\ell(0) = \frac{1}{e^{\beta\omega_\ell^0} - 1} \quad (5.1)$$

$$v_{i\ell}(0) = u_{i\ell} \quad (5.2)$$

で与える。ただし、 $\omega_\ell^0, u_{i\ell}$  は式 (3.13) で与えられる。

## 5.1 物理量

系の非平衡緩和過程を見るうえで重心とその速度を計算した。重心は以下の式によって計算した。

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \sum_{i=1}^{I_s} (i - I_c) \langle \psi_i^\dagger(t) \psi_i(t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{I_s} \sum_{\ell} (i - I_c) n_{\ell}(t) |v_{i\ell}(t)|^2\end{aligned}\quad (5.3)$$

また、重心の速度は式 (5.3) の時間微分として計算した。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{I_s} \sum_{\ell} (i - I_c) \{ \dot{n}_{\ell}(t) |v_{i\ell}(t)|^2 + 2\text{Re} n_{\ell}(t) v_{i\ell}^*(t) \dot{v}_{i\ell}(t) \}\quad (5.4)$$

## 5.2 数値計算結果

### 5.2.1 無次元化

パラメータは調和振動子エネルギー  $\hbar\omega$  を用いて以下のように無次元化した (ここでは次元がわかりやすいよう  $\hbar$  を明記する)。

$$T' = k_B T / \hbar\omega \quad (5.5)$$

$$t' = t\omega \quad (5.6)$$

$$J' = J / \hbar\omega \quad (5.7)$$

$$V' = V / \hbar\omega \quad (5.8)$$

$$U' = U / \hbar\omega \quad (5.9)$$

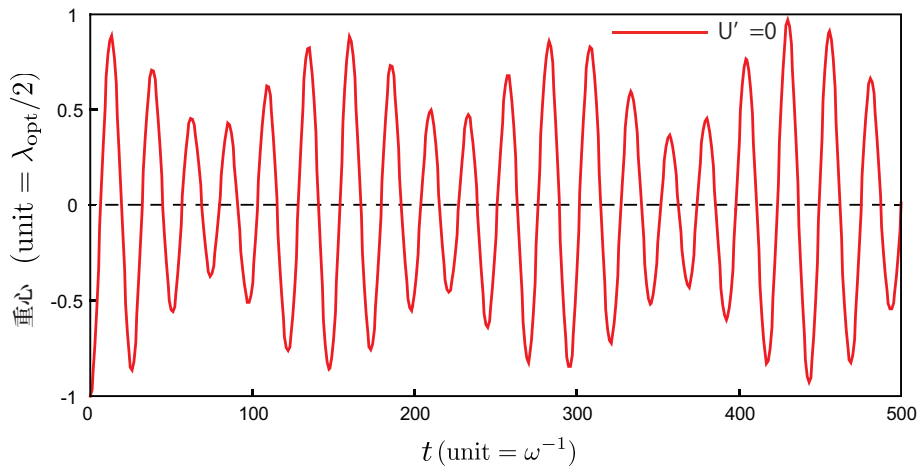
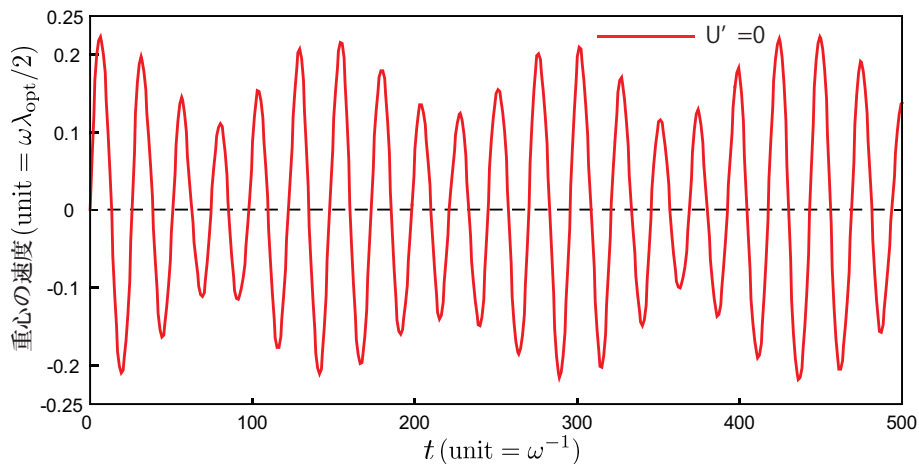
$$\mu' = \mu / \hbar\omega \quad (5.10)$$

### 5.2.2 $U' = 0$ の結果

まず、相互作用定数が  $U' = 0$  の結果を図 3, 図 4 に示す。その他のパラメータは以下にまとめた。

$$N = 5, I_s = 21, T' = 0.1, J' = 0.2, V' = 0.1 \quad (5.11)$$

$U' = 0$  では分布関数は時間発展しない。したがって、時間発展は完全系による式 (3.33) のみとなり緩和の様子は見られない。図 3, 図 4 から重心にうなりの様子が見られるが、光学格子を掛けている通常の調和振動子系では単振動となるため [21], このうなりは光学格子による効果であることがわかる。

図3 重心の時間変化 ( $U' = 0$ )図4 重心の速度の時間変化 ( $U' = 0$ )

### 5.2.3 相互作用の効果

次に、Markov 型量子輸送方程式 (4.39) を用いて計算した  $U' = 0.01$  と  $U' = 0.02$  の結果を図 5, 図 6 に示す。パラメータは  $U' = 0$  の時と同じで式 (5.11) である。図 5, 図 6 から重心および重心の速度の振動が、時間とともにうなりながら減衰していることがわかる。つまり、非平衡状態から平衡状態へ系の緩和が起きていることがわかる。うなりは  $U' = 0$  の時と同様に光学格子の効果であり、一方減衰は量子輸送方程式 (4.39) による効果である。また、計算結果の図 5, 図 6 を見ると  $U'$  の大きい方が早く緩和している様子がうかがえるが、これは相互作用が大きい方が散乱が起きやすくなるためである。

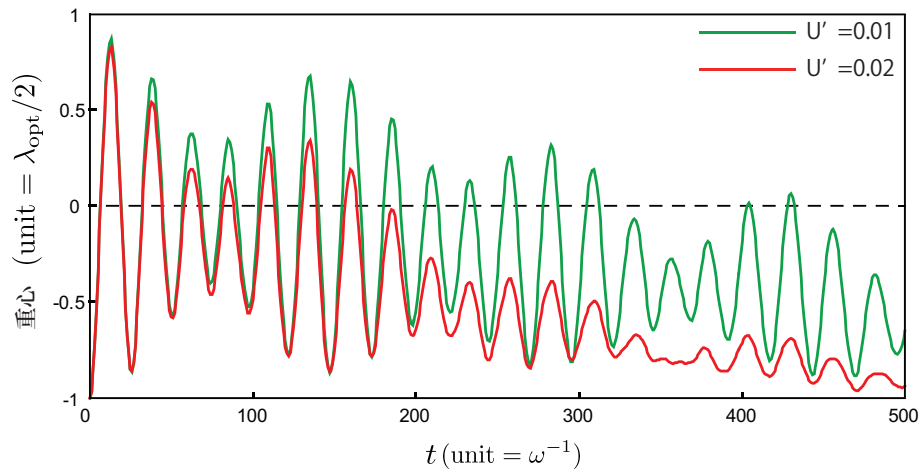


図5 重心の時間変化

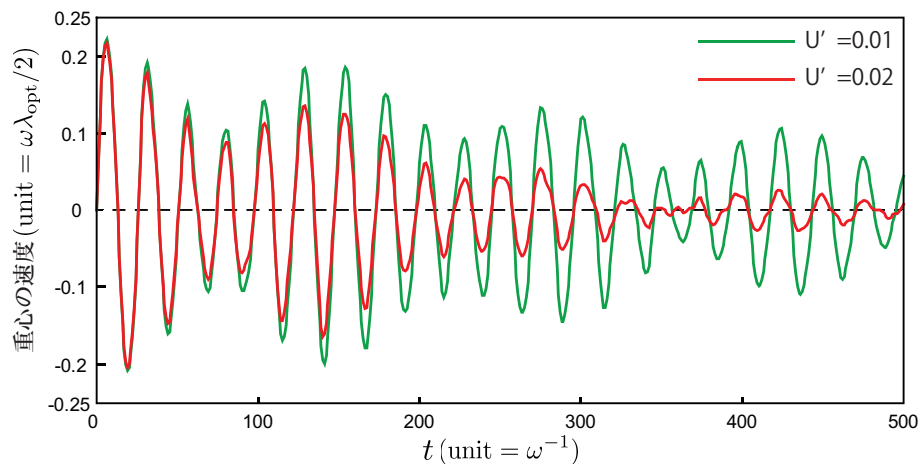


図6 重心の速度の時間変化

#### 5.2.4 Non-Markov 型と Markov 型の比較

最後に non-Markov 型量子輸送方程式 (4.38) 用いて計算した結果を, Markov 型量子輸送方程式 (4.39) の結果とともに図7, 図8に示す. なおパラメータはこれまで同様に式 (5.11) とし, 相互作用定数は  $U' = 0.01$  とした. 結果を比較すると non-Markov 型の方が Markov 型に比べて速く緩和することがわかる. これは non-Markov 型の方はエネルギー非保存の散乱過程も含むので, Markov 型に比べ散乱しやすいためである.

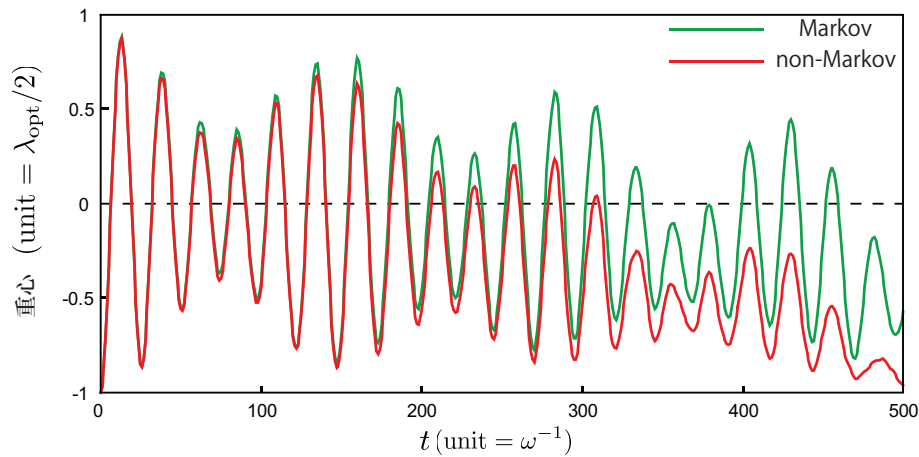


図7 Non-Markov型とMarkov型の比較(重心)

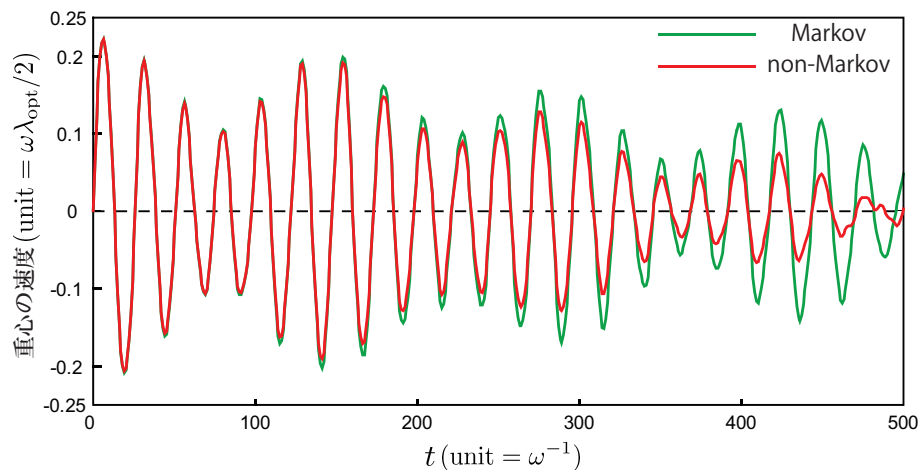


図8 Non-Markov型とMarkov型の比較(重心の速度)

## 6 まとめと今後の課題

本論文では時空に依存する TFD を研究するため、時空に依存するモデルとして一次元光学格子中の中性冷却 Bose 原子気体系を採用し、その系に対する量子輸送方程式を非平衡 TFD の立場で導出した。

第2章では平衡 TFD と非平衡 TFD の概説をした。平衡 TFD では、自由度を倍加することで混合状態期待値を純粋状態期待値で表せることを述べた。その際、熱的真空を消去する  $\xi$  演算子を導入し、もともとの  $a$  演算子と熱的 Bogoliubov 変換で結ばれることを述べた。非平衡 TFD では分布関数が時間依存するため  $a$  演算子と  $\xi$  演算子の時間発展が異なり、それによって熱的カウンター項  $\hat{Q}(t)$  が現れることを述べた。このとき、分布関数  $n_\ell(t)$  は未知関数として導入され、

$\hat{Q}(t)$  には  $\dot{n}_\ell(t)$  が含まれることから,  $n_\ell(t)$  と  $\hat{Q}(t)$  は自己無撞着な繰り込み条件によって決定されなければならなかった. そこで, on-shell 繰り込み条件  $S_{\ell\ell}^{12}[\omega_\ell, t]$  を課し, それにより量子輸送方程式が導出されることを述べた.

第 3 章では時空依存のモデルについて説明した. 時空依存のモデルとして一次元光学格子中の中性冷却 Bose 原子気体系を採用し, そのハミルトニアンを導出した. 今回のモデルでは  $t < 0$  と  $t \geq 0$  とで外場が異なっており, 各場合に対する場の演算子の展開として,  $t < 0$  ではハミルトニアンの対角化を利用し,  $t \geq 0$  では Schrödinger 方程式に従う時間依存の完全系で展開した.

第 4 章では非平衡 TFD の手順に従って, 第 3 章で導出したハミルトニアンに対する量子輸送方程式を導出した. このとき導出された量子輸送方程式は, 衝突項に過去の時間の分布関数も含まれる non-Markov 型であった. また, non-Markov 型の量子輸送方程式に Markov 近似を施すことで Markov 型の量子輸送方程式も導出した.

第 5 章では, 第 4 章で導出した non-Markov 型および Markov 型の量子輸送方程式を数値的に解くことで系の非平衡緩和過程を示した. その際, 物理量として重心とその速度を計算した. また, 相互作用なしだと緩和しないことや相互作用を強くすることで緩和が速くなることを確認した. さらに, non-Markov 型と Markov 型の量子輸送方程式の結果を比較した.

今回の計算で系が緩和する様子が見られた. しかし, 重心は初期位置に収束するという結果となり, これはずらした後の調和ポテンシャルの中心に重心が緩和するという直観に反するものである. 今回の計算結果だけではこの原因は掴めなかったため, その解析は今後の課題である. また, 今回はエネルギーの繰り込みは行わなかったため, エネルギーに対する相互作用の補正を考えていない. したがって, エネルギーの繰り込みを行うことで結果がどのように変わるか検証したい. また, 緩和時間の計算や non-Markov 型と Markov 型のさらなる比較などを通して, 時空依存 TFD の研究の発展に役立てたい.

## 付録 A 時間依存の完全系

第 3 章では,  $t \geq 0$  において場の演算子を時間依存の完全系で展開した. その際, 「 $a_\ell(t)$  の外場による時間依存性をすべて完全系に押し付けるように展開すると,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  は Schrödinger 方程式に従って時間発展する」と述べたが, この付録ではその点について説明する [18, 19].

まず, 場の演算子  $\psi_i(t)$  を

$$\psi_i(t) = \sum_{\ell} v_{i\ell}(t) a_{\ell}(t) \quad (\text{A.1})$$

のように展開する (ただし, この段階では「 $a_\ell(t)$  の外場による時間依存性を完全系に押し付ける」ということは考えていない). ここで,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  は時間依存する正規直交完全系であり, したがっ

て,  $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$  の同時刻交換関係 (3.5)~(3.7) より

$$[a_\ell(t), a_{\ell'}^\dagger(t)] = \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{A.2})$$

$$[a_\ell(t), a_{\ell'}(t)] = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$[a_\ell^\dagger(t), a_{\ell'}^\dagger(t)] = 0 \quad (\text{A.4})$$

を得る. また,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  の初期条件を  $v_{i\ell}(0) = u_{i\ell}$  ととる.  $\psi_i(t)$  の時間発展は Heisenberg 方程式より

$$i\partial_t \psi_i(t) = [\psi_i(t), H_0(t)] \quad (\text{A.5})$$

$$= \sum_j A_{ij} \psi_j(t) \quad (\text{A.6})$$

で与えられる. ここで,

$$A \equiv \begin{pmatrix} \nu_1 - \mu & -J & 0 & \cdots & 0 \\ -J & \nu_2 - \mu & -J & \ddots & \vdots \\ 0 & -J & \nu_3 - \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -J \\ 0 & \cdots & 0 & -J & \nu_{I_s} - \mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

であり, 二段目への式変形では

$$H_0(t) = \boldsymbol{\psi}^\dagger(t) A \boldsymbol{\psi}(t) \quad (\text{A.8})$$

を使った. 今,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  の時間依存性により  $a_\ell(t)$  の時間発展演算子が  $H_0(t)$  とは限らない. そこで,  $a_\ell(t)$  の時間発展演算子を  $H_a(t)$  とする. すなわち

$$i\partial_t a_\ell(t) = [a_\ell(t), H_a(t)] \quad (\text{A.9})$$

とする. ここで,  $H_a(t)$  に対して「 $a_\ell(t)$  について対角的」という要請をする. この要請は時間依存しない準粒子描像のためである. したがって,

$$H_a(t) = \sum_\ell \lambda_\ell(t) a_\ell^\dagger(t) a_\ell(t) \quad (\text{A.10})$$

を要請する. このとき, 式 (A.1) より

$$i\partial_t \psi_i(t) = \sum_\ell [(i\partial_t v_{i\ell}(t)) a_\ell(t) + \lambda_\ell(t) v_{i\ell}(t) a_\ell(t)] \quad (\text{A.11})$$

$$= \sum_j \sum_\ell \left[ v_{i\ell}(t) \left( i\overleftarrow{\partial}_t + \lambda_\ell(t) \right) v_{j\ell}^*(t) \right] \psi_j(t) \quad (\text{A.12})$$

となるが, 式 (A.6) と比べることで

$$A_{ij} = \sum_\ell \left[ v_{i\ell}(t) \left( i\overleftarrow{\partial}_t + \lambda_\ell(t) \right) v_{j\ell}^*(t) \right] \quad (\text{A.13})$$

とわかる. 両辺に  $v_{j\ell}(t)$  をかけて  $j$  で和をとり整理すると

$$i\partial_t v_{i\ell}(t) = \sum_j (A_{ij} - \delta_{ij} \lambda_\ell(t)) v_{j\ell}(t) \quad (\text{A.14})$$

となる.

さて, ここで

$$v_{i\ell}(t) \rightarrow v_{i\ell}(t) e^{i \int^t ds \lambda_\ell(s)} \quad (\text{A.15})$$

という置き換えをすると式 (A.14) は

$$i\partial_t v_{i\ell}(t) = \sum_j A_{ij} v_{j\ell}(t) \quad (\text{A.16})$$

となることがわかる. したがって,

$$a_\ell(t) = \sum_i \psi_i(t) v_{i\ell}^*(t) \quad (\text{A.17})$$

の時間発展は式 (A.6), (A.16) より

$$i\partial_t a_\ell(t) = \sum_{ij} [A_{ij} \psi_j(t) v_{i\ell}^*(t) - \psi_i(t) v_{j\ell}^*(t) A_{ji}] \quad (\text{A.18})$$

$$= 0 \quad (\text{A.19})$$

となり,  $a_\ell(t)$  は時間発展しない, すなわち  $a_\ell(t) = a_\ell$  であることがわかる (ただし, 分布関数由来の時間依存性は残る. この付録ではそれは表記しない). これは式 (A.15) のような置き換えを行ったためであり,  $a_\ell(t)$  の時間依存性を完全系  $\{v_{i\ell}(t)\}$  に押し込めたことを意味する.

なお,  $\{v_{i\ell}(t)\}$  の正規直交完全性は保存する. 実際

$$i\partial_t \left[ \sum_i v_{i\ell'}^*(t) v_{i\ell}(t) \right] = \sum_{ij} [v_{i\ell'}^*(t) A_{ij} v_{j\ell}(t) - v_{j\ell'}^*(t) A_{ji} v_{i\ell}(t)] \quad (\text{A.20})$$

$$= 0$$

$$i\partial_t \left[ \sum_\ell v_{i\ell}(t) v_{i\ell}^*(t) \right] = \sum_\ell \sum_j [A_{ij} v_{j\ell}(t) v_{i\ell}^*(t) - v_{i\ell}(t) v_{j\ell}^*(t) A_{ji}] \quad (\text{A.21})$$

$$= \sum_j [\delta_{i'j} A_{ij} - \delta_{ij} A_{ji}]$$

$$= 0$$

と示せる. ただし, 計算では  $A_{ij} = A_{ji}$  を用いた.



## 謝辞

本研究を進めるにあたり、熱心なご指導をしてくださいました山中由也教授に深く感謝いたします。また、小林恵太博士、中村祐介助教、井上智喜氏には沢山の有意義な議論と助言を頂きました。高橋淳一氏とは場の理論、TFD等様々な内容に関して議論させて頂きました。また、中村充志氏、朝比奈毅典氏、小嶋祐介氏、清田俊輔氏との議論も本研究の助けとなりました。本研究に携わった皆様方へ厚く御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] A.Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 261 (1924); Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 3 (1925).
- [2] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
- [3] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [4] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Huket, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687(1995).
- [5] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. -J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Science **275**, 637 (1997).
- [6] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958).
- [7] H. Feshbach, Ann. Phys. (N.Y.) **19**, 287 (1962).
- [8] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **78**, 764 (1997).
- [9] B. Jackson and E. Zaremba, Phys. Rev. Lett. **88**, 180402 (2002).
- [10] S. A. Morgan, M. Rusch, D. A. W. Hutchinson, and K. Burnett, Phys. Rev. Lett. **91**, 250403 (2003).
- [11] S. A. Morgan, Phys. Rev. A **72**, 043609 (2005).
- [12] A. Bezett and P. B. Blakie, Phys. Rev. A **79**, 023602 (2009).
- [13] M. Yamashita, M. Koashi, and N. Imoto, Phys. Rev. A **59**, 2243 (1999).
- [14] H. Umezawa, *Advanced Field Theory – Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [15] 中村祐介, 桑原幸朗, 山中由也, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 21pEE-12 (2011).
- [16] H. Chu and H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 163 (1995).

- [17] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010).
- [18] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1070 (2011).
- [19] Y. Nakamura (2011). Formulation of Nonequilibrium Thermo Field Dynamics for Bose-Einstein Condensates of Cold Neutral Atomic Gases. PhD Thesis, Waseda University Graduate School of Advanced Science and Engineering.
- [20] D. Jaksh, C. Burder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [21] 江沢洋, 量子力学 (I) (裳華房, 2002).